

Lezione n. 7

*Calcolo del campo elettromagnetico:
ottica geometrica,
teoria uniforme della diffrazione*

Impatto ambientale dei campi elettromagnetici

Riassumendo

- L'espressione che descrive la propagazione del campo secondo l'ottica geometrica è del tipo:

$$\underline{E}(s) = \underline{E}(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} e^{j(n-m)\pi/2}$$

dove:

- $\underline{E}(0)$ rappresenta il **campo** (ampiezza, polarizzazione e fase) nel punto di riferimento ($s_0 = 0$);
- s è la **distanza** lungo il raggio dal punto di riferimento, pertanto
- $\exp(-jks)$ esprime lo **sfasamento** lungo la traiettoria;
- il termine sotto radice rappresenta il fattore di **divergenza** del fascio, ovvero le variazioni di ampiezza del campo lungo la traiettoria;
 - ρ_1 e ρ_2 rappresentano i **raggi di curvatura** principali del fascio nel punto di riferimento. La convenzione che si adotta è tale che un raggio di curvatura **positivo** (**negativo**) implica un fascio **divergente** (**convergente**) nel corrispondente piano principale
- n (m) è il numero di **caustiche** attraversate dall'osservatore che si muove lungo la traiettoria nella direzione di (opposta a quella di) propagazione del campo

Riassumendo

- Analoga espressione è valida per il campo magnetico:

$$\underline{H}(s) = \underline{H}(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} e^{j(n-m)\pi/2}$$

Inoltre, campo elettrico e campo magnetico sono **localmente** legati dalle relazioni tipiche di un'onda piana:

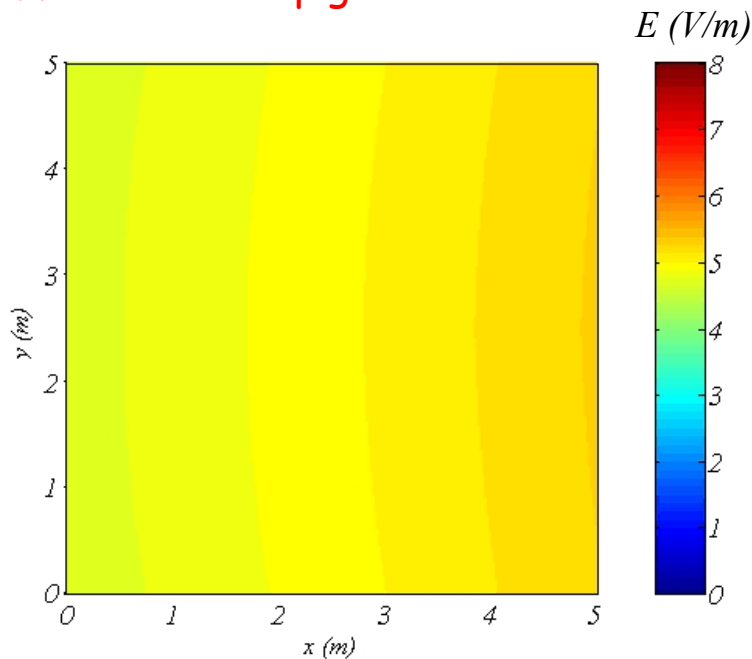
$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \zeta \underline{H}_0(\underline{r}) \times \nabla \Psi(\underline{r})$$

$\underline{E}_0, \underline{H}_0, \nabla \Psi$ formano una terna ortogonale destra

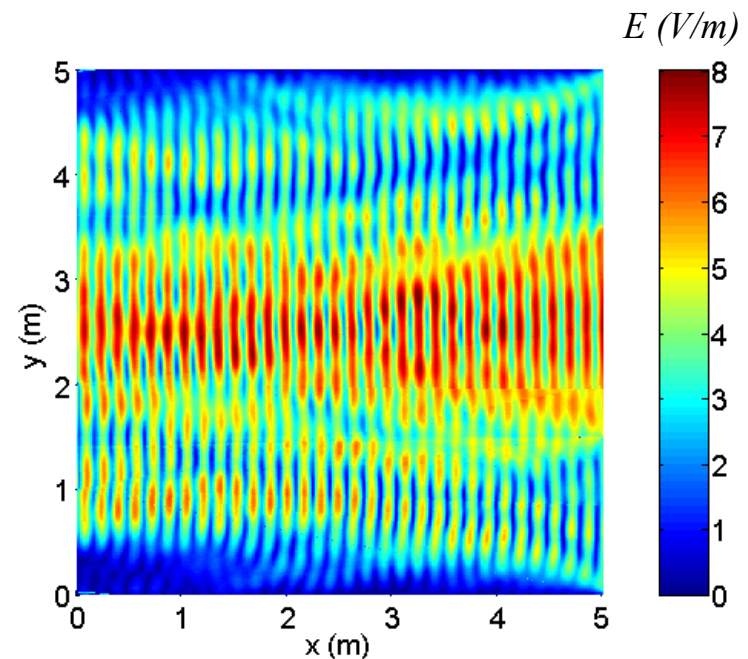
$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta$$

Propagazione in presenza di oggetti dielettrici

- L'ottica geometrica vista fin'ora considera la propagazione del campo elettromagnetico nello spazio libero (i.e. senza confini).
- Quando un oggetto è presente nella regione di interesse, il campo elettromagnetico genera correnti su di esso, le quali, a loro volta, generano un campo elettromagnetico diffuso (scatterato).
- Il calcolo del campo elettromagnetico totale vorrebbe la soluzione completa delle equazioni di Maxwell. Tuttavia, se gli oggetti in questione sono di dimensioni sufficientemente estese (i.e. parecchie lunghezze d'onda), allora l'uso ancora una volta di tecniche asintotiche permette la valutazione del campo distinguendo tra diverse caratteristiche geometriche. In particolare, si possono prendere in esame diversi processi, quali **riflessione da superfici e diffrazione da spigoli**.

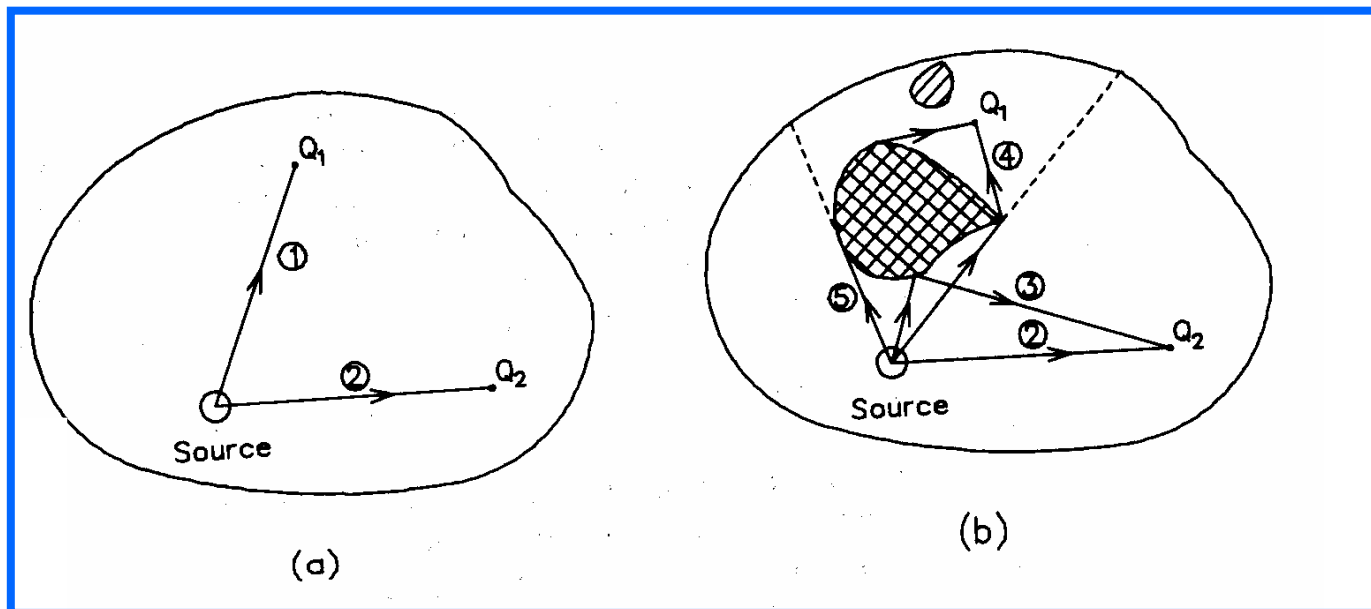
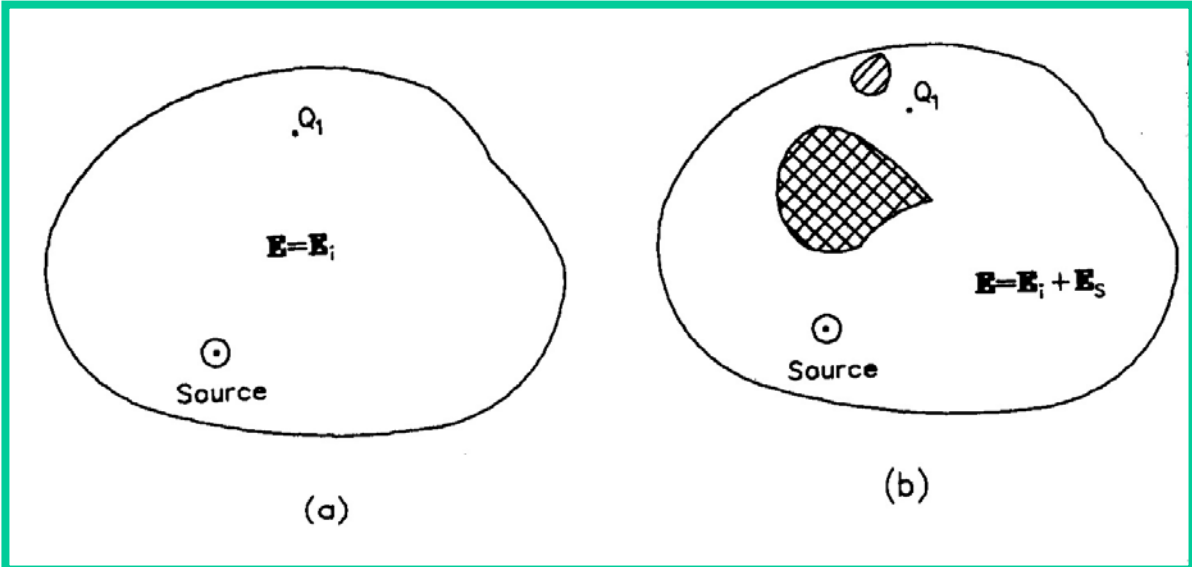


GSM900: spazio libero



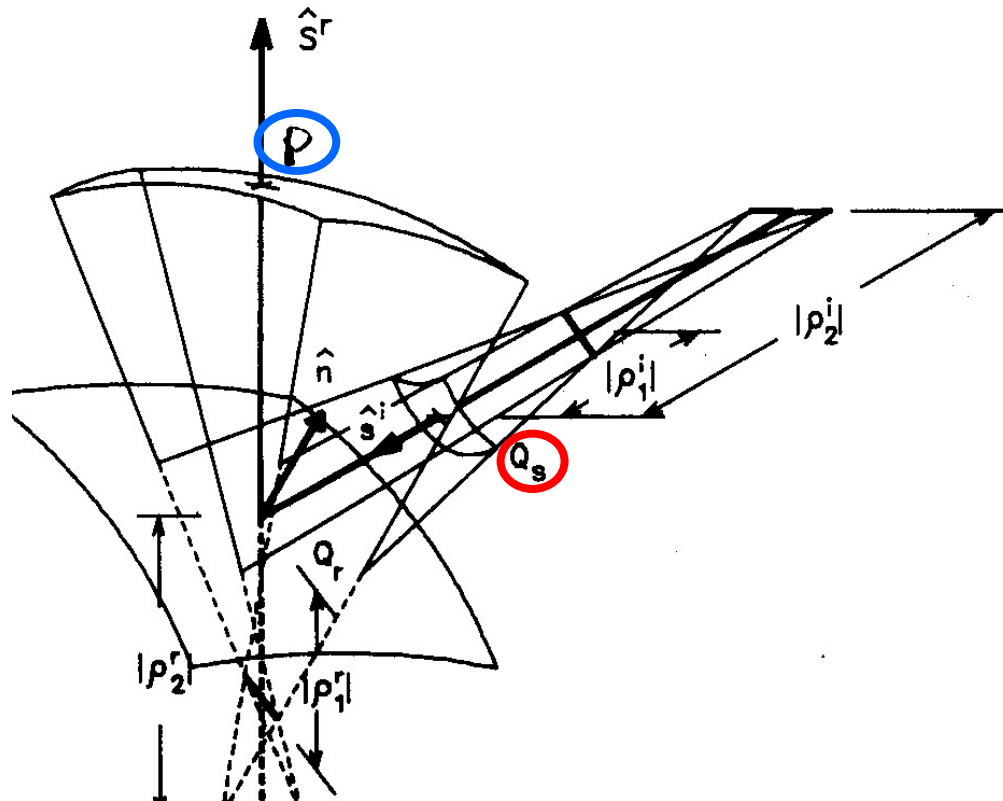
GSM900: stanza vuota con finestra

Campo incidente: em vs o.g.



Riflessione

- Primo passo è quello di prendere in esame il processo di riflessione da superfici curve (lisce).
- Scopo è quello di valutare il campo elettromagnetico ad un punto P dopo la riflessione su una superficie, conoscendo il campo nel punto Q_s di riferimento.



Campo riflesso

- Il campo nel punto P sarà esprimibile come:

$$\underline{E}^r(P) = \underline{E}^r(Q_r) \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r}$$

dove

- Q_r rappresenta il punto in cui avviene la riflessione sulla superficie,
- s^r rappresenta la distanza del punto P di osservazione dal punto Q_r ,
- $\rho_1^r \rho_2^r$ rappresentano i raggi di curvatura principale del tubo di raggi riflesso al punto Q_r .

Il campo incidente in Q_r sarà dato da:

$$\underline{E}^i(Q_r) = \underline{E}^i(Q_s) \sqrt{\frac{\rho_1^i \rho_2^i}{(\rho_1^i + s^i)(\rho_2^i + s^i)}} e^{-jks^i}$$

con analogo significato dei simboli rispetto al punto di riferimento Q_s .

Calcolo del campo riflesso

In conclusione, per valutare il campo riflesso da una superficie bisogna:

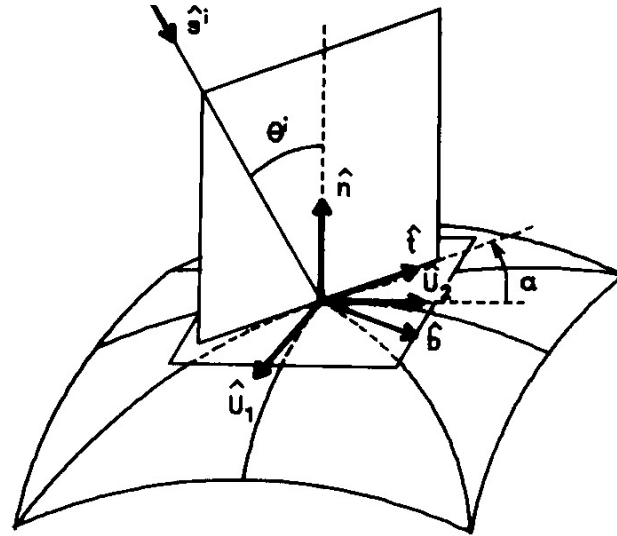
1. dati il punto di partenza Q_s ed il punto di osservazione P , si deve determinare il punto di incidenza sulla superficie;
2. determinare il coefficiente di riflessione locale della superficie;
3. dalle proprietà nel punto di incidenza del fronte d'onda incidente, si determinano i raggi di curvatura principali del fronte d'onda riflesso.

1

Il punto di incidenza Q_r è determinato dal principio di Fermat generalizzato: il percorso ottico deve essere un estremo (quindi o un massimo o un minimo a seconda delle proprietà della superficie riflettente)

Legge della riflessione - coordinate locali

Sulla superficie di riflessione, possono definirsi due piani principali, a cui corrispondono i raggi di curvatura principali della superficie



Dato il punto Q_r sulla superficie, rimane univocamente determinato il versore \hat{n} , normale alla superficie nel punto considerato. Si consideri ora un piano che intersechi la superficie nel punto considerato e contenente il versore normale. Tale piano individua sulla superficie una curva che prende il nome di *normal section curve*, a cui rimane associato un raggio di curvatura. Se il piano viene ruotato, diverse *normal section curves* vengono generate. Si può dimostrare che, per ogni *well behaved surface*, esiste un piano di intersezione che massimizza il raggio di curvatura, e uno che lo minimizza. Tali raggi vengono definiti **raggi di curvatura principali** e i due piani corrispondenti **piani principali**. Sulle curve corrispondenti potranno definirsi i versori \hat{u}_1 ed \hat{u}_2 .

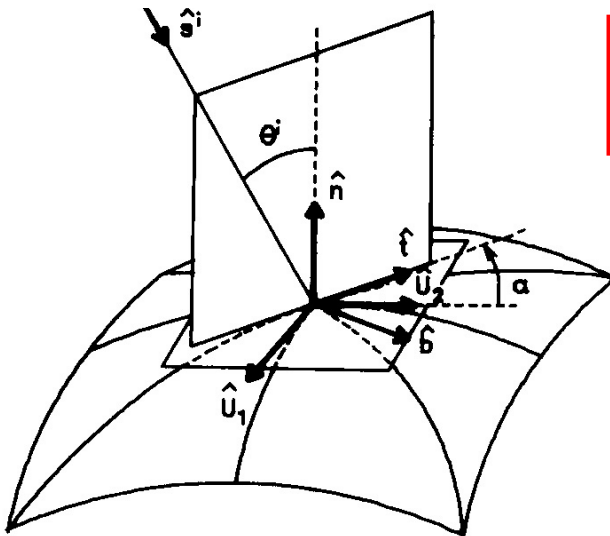
Piano di incidenza

- Considerato un generico tubo di raggi il cui raggio centrale incide sulla superficie a Q_r con il versore del raggio individuato da \hat{s}^i , il piano individuato da \hat{s}^i e dalla normale al punto di incidenza viene definito piano di incidenza.
- L'angolo di incidenza θ^i sarà dato da:

$$\theta^i = -\arccos(\hat{n} \cdot \hat{s}^i)$$

- Rimane definito, inoltre, un versore tangente alla superficie (intersezione del piano di incidenza con la superficie) e tale che

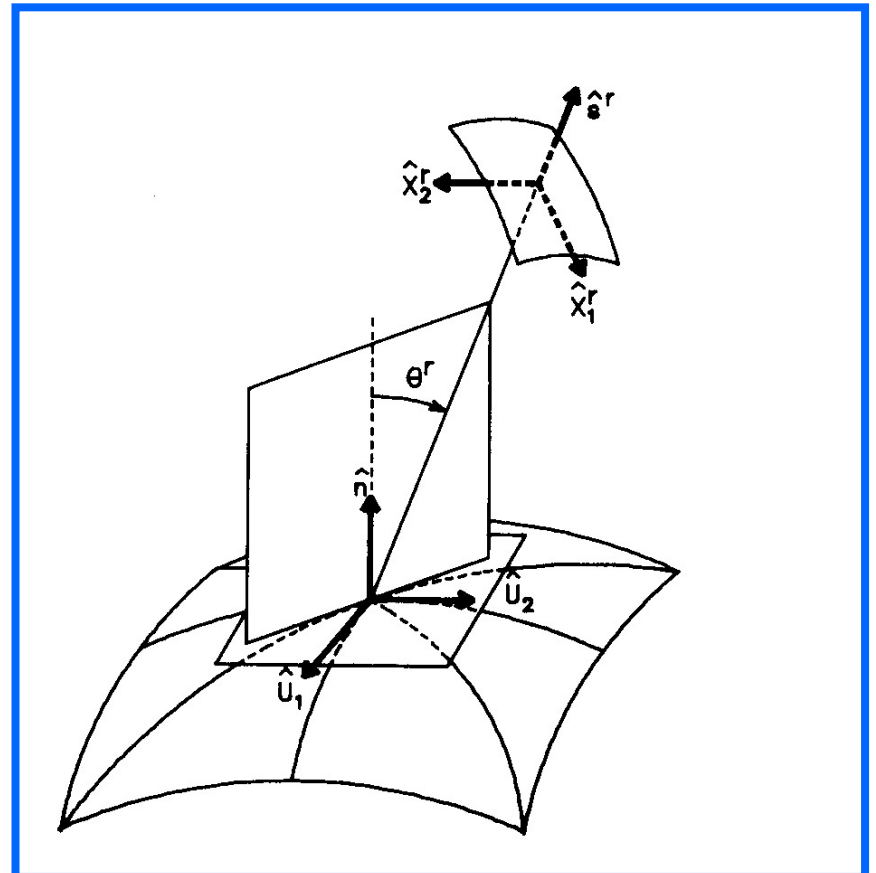
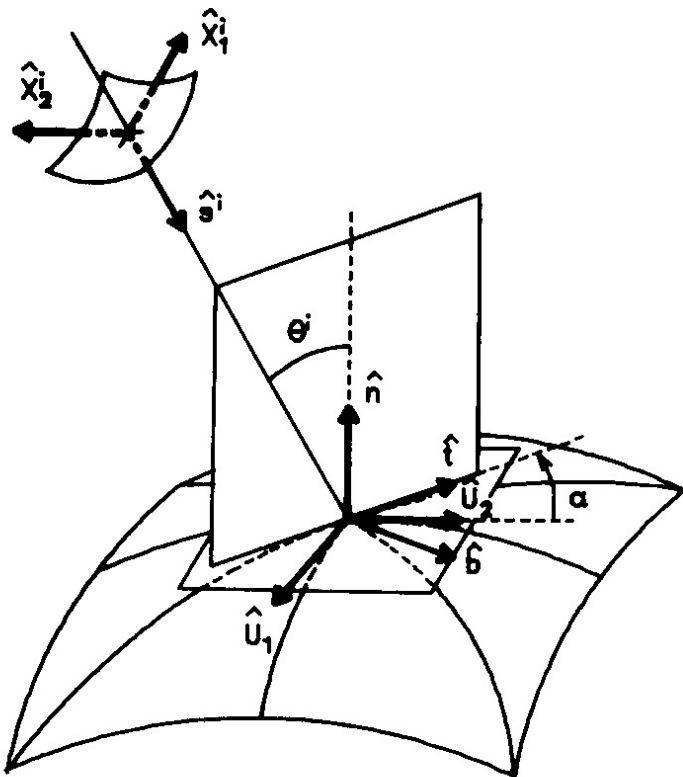
$$\cos(\alpha) = \hat{U}_2^i \cdot \hat{t}$$



Direzioni principali dei fronti d'onda

In modo analogo a quanto detto per la superficie di riflessione, si possono definire i piani principali, i raggi di curvatura principali, e i corrispondenti versori (i.e. direzioni) principali, anche per i fronti d'onda del campo incidente e riflesso.

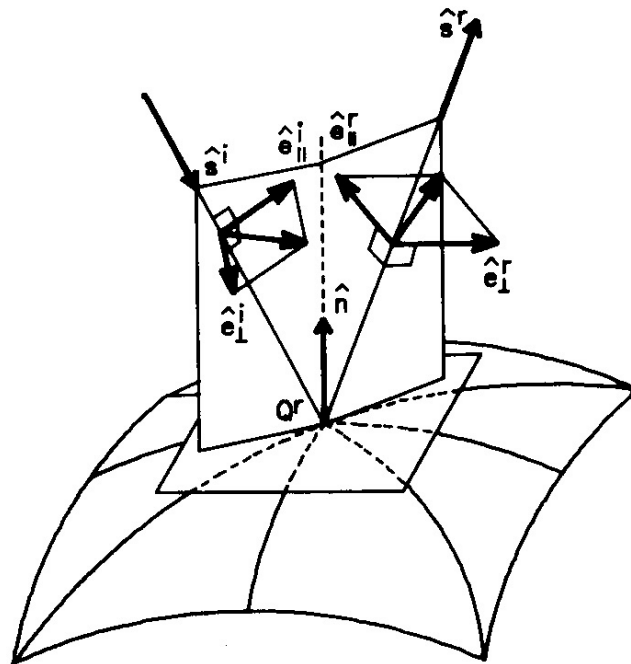
Tutto con riferimento al punto Q_r .



Sistema di coordinate locali: polarizzazione del raggio

Il campo elettrico incidente su Q_r si potrà sempre decomporre in una componente **parallela ed una perpendicolare al piano di incidenza**.

Analogamente, il campo riflesso si potrà decomporre in una componente **parallela ed una perpendicolare al piano di riflessione**.



Sarà:
$$\underline{E}^i(Q_r) = \hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r)$$
 con
$$\hat{e}_{//}^i = \hat{e}_{\perp}^i \times \hat{s}^i$$

La legge della riflessione

Per dimostrare il legame tra campo incidente e riflesso secondo le notazioni dell'ottica geometrica, si farà riferimento ad una superficie perfettamente **conduttrice**.

Dato un campo incidente noto, per determinare il campo riflesso si deve imporre la condizione al contorno sulla superficie di riflessione:

$$\hat{n} \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 \quad \forall \underline{r} \in S$$

dove E rappresenta il campo totale nel primo mezzo, dato dalla somma tra campo incidente e riflesso.

$$\hat{n} \times \underline{E}^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}^r(\underline{r}) \quad \forall \underline{r} \in S$$

Sostituendo nella condizione le espressioni dei campi secondo lo sviluppo di Luneberg-Kline, si ottiene,

La legge della riflessione (2)

$$\hat{n} \times \underline{E}^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}^r(\underline{r}) \quad \forall \underline{r} \in S$$

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = e^{-jk\Psi(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m(\underline{r})}{(j\omega)^m}$$

$$\hat{n} \times e^{-jk\Psi_i(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m^i(\underline{r})}{(j\omega)^m} = -\hat{n} \times e^{-jk\Psi_r(\underline{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\underline{E}_m^r(\underline{r})}{(j\omega)^m}$$

uguagliando le uguali potenze di $j\omega$

$$\Psi_i(\underline{r}) = \Psi_r(\underline{r})$$

$$\forall \underline{r} \in S$$

$$\hat{n} \times \underline{E}_m^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}_m^r(\underline{r})$$

La legge della riflessione (3)

Dall'uguaglianza delle fasi segue:

$$\Psi_i(\underline{r}) = \Psi_r(\underline{r})$$

Poiché le fasi devono essere uguali in tutti i punti della superficie, ne segue che anche le derivate delle ψ_i e ψ_r **lungo la superficie** saranno uguali. Allora, se si considera il versore tangente alla superficie di riflessione contenuto nel piano di incidenza, si avrà:

$$\nabla\Psi_i(Q_r) \cdot \hat{t}(Q_r) = \nabla\Psi_r(Q_r) \cdot \hat{t}(Q_r)$$

$$\hat{s}^i \cdot \hat{t}(Q_r) = \hat{s}^r \cdot \hat{t}(Q_r)$$

piano di incidenza
e di riflessione
coincidono!!!!

$$\hat{s}^i \cdot \hat{t}(Q_r) = \text{sen}(\theta_i)$$

$$\hat{s}^r \cdot \hat{t}(Q_r) = \text{sen}(\theta_r)$$

$$\text{sen}(\theta^i) = \text{sen}(\theta^r) \Rightarrow \theta^i = \theta^r$$

Inoltre, poiché \hat{s}_i ed \hat{s}_r sono dei versori, ne segue necessariamente

$$|\hat{s}^i \cdot \hat{n}(Q_r)| = |\hat{s}^r \cdot \hat{n}(Q_r)|$$

Traiettorie dei raggi riflessi

Dalle relazioni trovate per i versori dei raggi incidente e riflesso si può determinare univocamente la direzione dei raggi riflessi nota la direzione dei raggi incidenti. Infatti,

$$\hat{s}^i = (\hat{s}^i \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^i \cdot \hat{t})\hat{t}$$

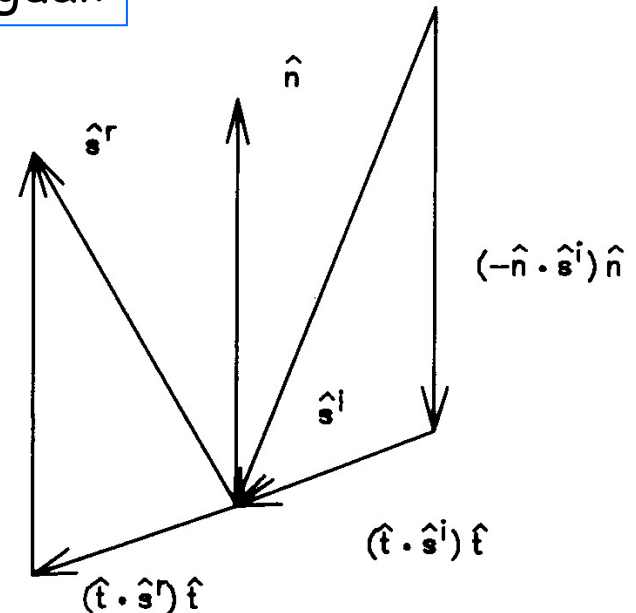
$$\hat{s}^r = (\hat{s}^r \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^r \cdot \hat{t})\hat{t}$$

opposti

uguali

$$\hat{s}^r = -(\hat{s}^i \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{s}^i \cdot \hat{t})\hat{t}$$

$(-\hat{n} \cdot \hat{s}^i)\hat{n}$



Polarizzazione

- Poiché piano di incidenza e riflessione coincidono, ne segue

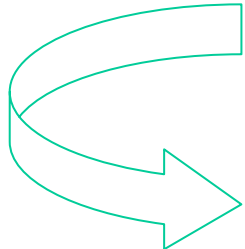
$$\hat{e}_{\perp}^i = \hat{e}_{\perp}^r \quad \Rightarrow \quad \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i = \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^r$$

- mentre ciò non sarà in generale vero per i versori paralleli al piano di incidenza. Si può però scrivere,

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i = \hat{n} \times (\hat{e}_{\perp}^i \times \hat{s}^i) = \hat{e}_{\perp}^i (\hat{n} \cdot \hat{s}^i) - \hat{s}^i (\hat{n} \cdot \hat{e}_{\perp}^i) = -\hat{e}_{\perp}^i \cos(\theta^i)$$

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r = \hat{n} \times (\hat{e}_{\perp}^r \times \hat{s}^r) = \hat{e}_{\perp}^r (\hat{n} \cdot \hat{s}^r) - \hat{s}^r (\hat{n} \cdot \hat{e}_{\perp}^r) = \hat{e}_{\perp}^r \cos(\theta^r)$$



$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r = \hat{e}_{\perp}^i \cos(\theta^i) = -\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i$$

ortogonali...

Coefficiente di riflessione

Dalla condizione al contorno segue per il campo di ottica geometrica

$$\hat{n} \times \underline{E}_0^i(\underline{r}) = -\hat{n} \times \underline{E}_0^r(\underline{r})$$

$$\hat{n} \times \left[\hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r) \right] = -\hat{n} \times \left[\hat{e}_{//}^r E_{//}^r(Q_r) + \hat{e}_{\perp}^r E_{\perp}^r(Q_r) \right]$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i E_{//}^i(Q_r) + \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i E_{\perp}^i(Q_r) = -\hat{n} \times \hat{e}_{//}^r E_{//}^r(Q_r) - \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^r E_{\perp}^r(Q_r)$$

$$\hat{n} \times \hat{e}_{//}^i \left[E_{//}^i(Q_r) - E_{//}^r(Q_r) \right] + \hat{n} \times \hat{e}_{\perp}^i \left[E_{\perp}^i(Q_r) + E_{\perp}^r(Q_r) \right] = 0$$

uguagliando i singoli termini (le due componenti sono tra loro ortogonali..)

$$E_{//}^i(Q_r) = E_{//}^r(Q_r)$$

$$E_{\perp}^i(Q_r) = -E_{\perp}^r(Q_r)$$

Il coefficiente di riflessione risulta allora:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Coefficiente riflessione (2)

- E' facile riconoscere nelle componenti ortogonale e parallela del campo incidente le **componenti orizzontale e verticale** delle onde piane uniformi incidenti alla superficie piana di separazione tra due mezzi.
- I risultati ottenuti si possono allora generalizzare ad una qualunque superficie di separazione tra due mezzi, sostituendo a 1 e -1 i **coefficienti di riflessione**, rispettivamente, per polarizzazione parallela e verticale.
- La trattazione può essere estesa grazie alle proprietà di onda **localmente piana** tipiche dell'ottica geometrica.

Campo riflesso

2

$$\underline{E}^r(s) = \underline{E}^i(Q_r) \underline{R} \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s^r)(\rho_2^r + s^r)}} e^{-jks^r}$$

Campo nel "punto di riferimento"

Coefficiente di riflessione

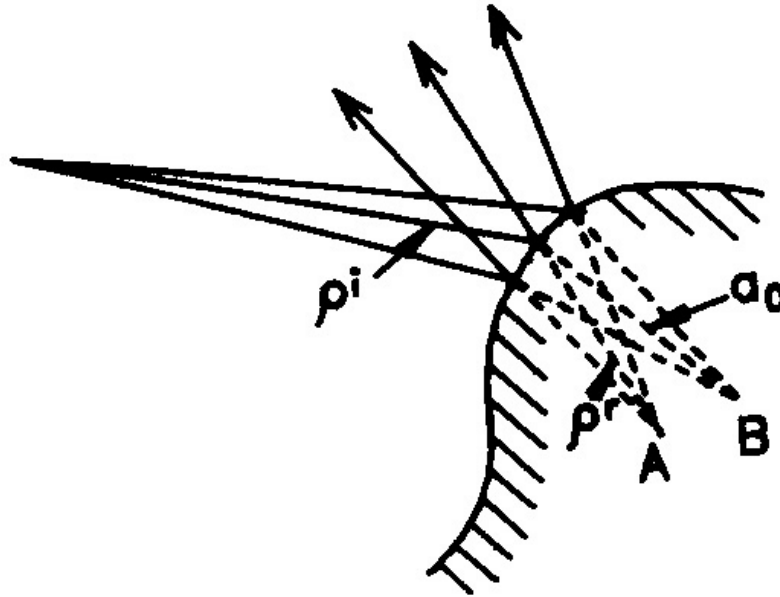
Attenuazione spaziale per fattore divergenza

Fattore di fase

Mancano da definire i raggi di curvatura del fronte d'onda riflesso

Raggi di curvatura del campo riflesso

- Il calcolo dei raggi di curvatura del campo riflesso è piuttosto lungo e laborioso;
- si basa su valutazioni geometriche;
- per illustrarlo, si può considerare il caso **bidimensionale**

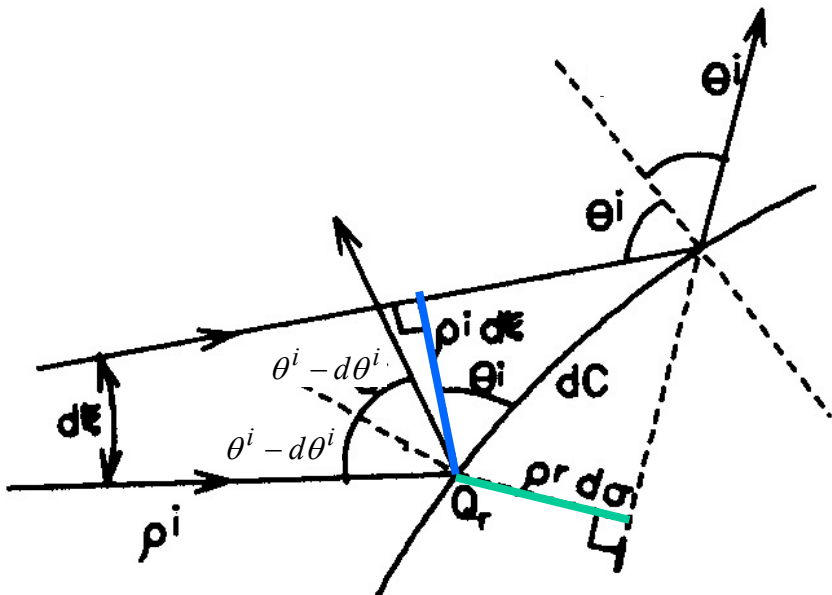
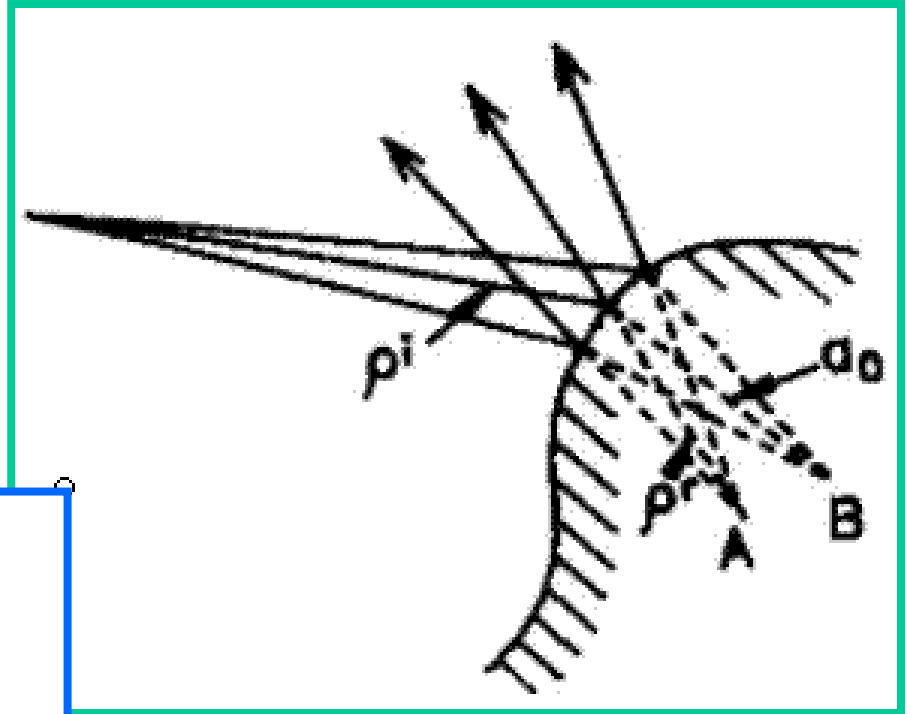


- ρ_i è il raggio di curvatura (uno, siamo in 2D) del fronte d'onda incidente;
- ρ_r è il raggio di curvatura del fronte d'onda riflesso;
- a_0 è il raggio di curvatura della superficie riflettente nel punto di incidenza (approssimata nell'intorno di tale punto con un arco circolare);

un po' di geometria....

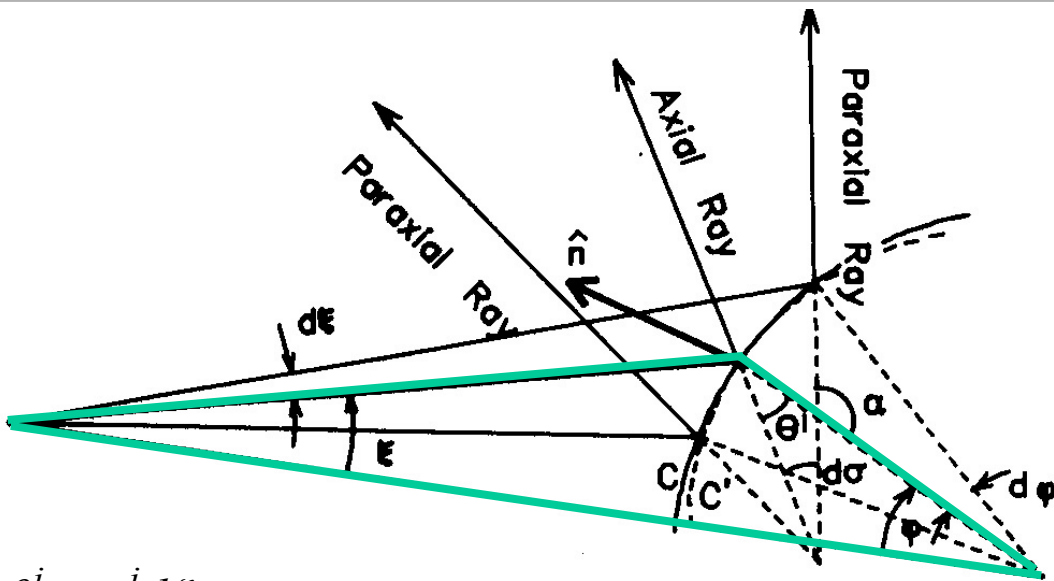
$$dC = a_0 d\phi$$

$$dC \cos \theta^i = \rho^i d\xi$$



$$dC \cos \theta^i = \rho^r d\sigma$$

un po' di geometria....(2)



$$dC \cos \theta^i = \rho^i d\xi$$

La somma degli angoli di un triangolo è 180°

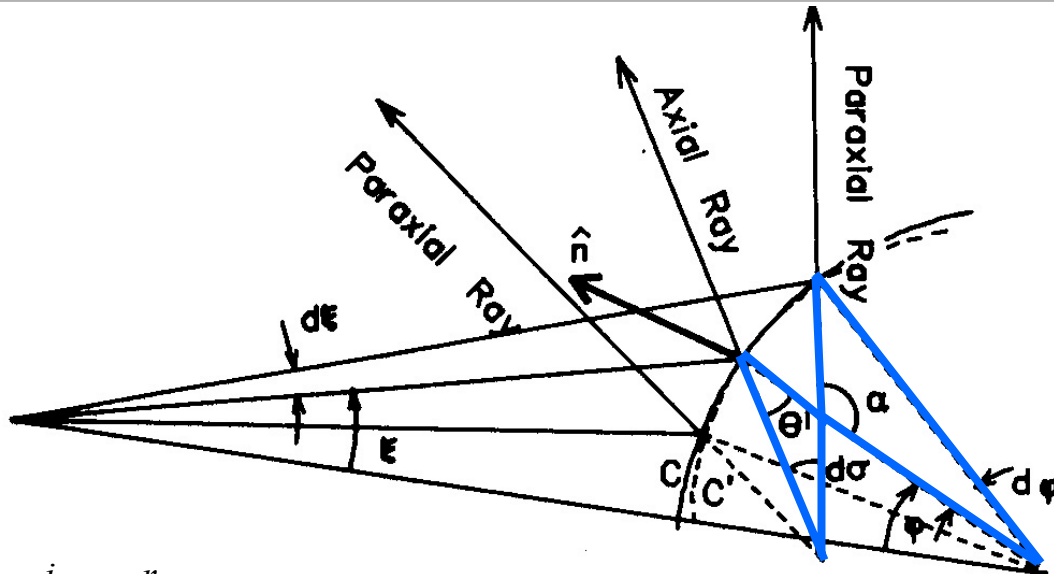
$$\theta^i = \xi + \phi$$

$$dC = \frac{\rho^i (d\theta^i - d\phi)}{\cos \theta^i} = a_0 d\phi$$

$$d\xi = d\theta^i - d\phi$$

$$d\phi = \frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i}$$

un po' di geometria....(3)



$$dC \cos \theta^i = \rho^r d\sigma$$

La somma degli angoli di un triangolo è 180°

$$dC = \frac{\rho^r (d\theta^i + d\phi)}{\cos \theta^i} = a_0 d\phi$$

$$\alpha + d\sigma + \theta^i = \alpha + (\theta^i + d\theta^i) + d\phi$$

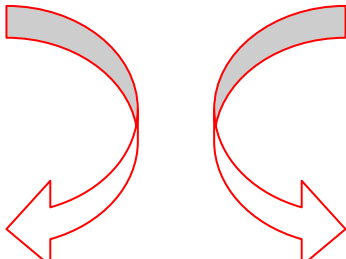
$$d\sigma = d\theta^i + d\phi$$

$$d\phi = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$

e infine...

$$d\phi = \frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i}$$

$$d\phi = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$


$$\frac{\rho^i d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i + \rho^i} = \frac{\rho^r d\theta^i}{a_0 \cos \theta^i - \rho^r}$$

3

$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{a_0 \cos \theta^i}$$

Campi riflessi da superfici 3D

3.5.2 Principal Radii of Curvature of Reflected Ray Tube at Q_r —First Format

The expressions for the principal radii of curvature at Q_r of the reflected wavefront were shown by Kouyoumjian and Pathak [2] to be of the form:

$$\frac{1}{\rho_1^r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i} \right] + \frac{1}{f_1} \quad (3.206)$$

$$\frac{1}{\rho_2^r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_1^i} + \frac{1}{\rho_2^i} \right] + \frac{1}{f_2} \quad (3.207)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{1,2}} = & \frac{\cos\theta^i}{(\det[\Gamma])^2} \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{a_1} \right. \\ & \left. + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right] \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right) \frac{4 \cos\theta^i}{(\det[\Gamma])^2} \times \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 - (\Gamma_{12})^2}{a_1} + \frac{(\Gamma_{21})^2 - (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{4 \cos^2\theta^i}{(\det[\Gamma])^4} \left\{ \left[\frac{(\Gamma_{22})^2 + (\Gamma_{12})^2}{a_1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{(\Gamma_{21})^2 + (\Gamma_{11})^2}{a_2} \right]^2 - \frac{4 (\det[\Gamma])^2}{a_1 a_2} \right\} \right]^{1/2} \quad (3.208) \end{aligned}$$

in which the plus sign is associated with f_1 and the minus sign with f_2 . The Γ_{ij} are defined in (3.183).

3.5.3 Principal Radii of Curvature of Reflected Ray Tube at Q_r —Second Format

An alternative (though entirely consistent) form of the expressions for ρ_1^r and ρ_2^r have been provided by Pathak, Burnside, and Marhefka [7]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1,2}^r} = & \frac{1}{\rho_m^i} + \frac{f}{a_t \cos\theta^i} \left\{ 1 \pm \left[\frac{a_t^2 \cos^2\theta^i}{4f^2} \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right)^2 \right. \right. \\ & + \frac{a_t^2 \cos\theta^i}{f^2} \left(\frac{1}{\rho_1^i} - \frac{1}{\rho_2^i} \right) \left[\frac{g \cos^2\delta}{a_t} \right. \\ & \left. \left. - \sin 2\delta \sin 2\alpha \cos\theta^i \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. + 1 - \frac{4a_t^2 \cos^2\theta^i}{f^2 a_1 a_2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (3.209)$$

in which the plus sign is associated with ρ_1^r and the minus sign with ρ_2^r . The term ρ_m^i is

$$\frac{1}{\rho_m^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \quad (3.210)$$

where the subscript m indicates the mean radius of curvature of the incident wavefront at Q_r . Other terms are

$$f = 1 + \frac{a_t}{a_b} \cos^2\theta^i \quad (3.211)$$

$$g = 1 - \frac{a_t}{a_b} \cos^2\theta^i \quad (3.212)$$

and a_t and a_b are defined in (3.203) and (3.204), respectively. The advantage of this second format is that the role of the radii of curvature a_t and a_b , as well as the angle δ , are shown explicitly.

(2)

Problema.....

La formula per ottenere la distanza dalla caustica per il raggio riflesso (e.g. nel caso 2D)

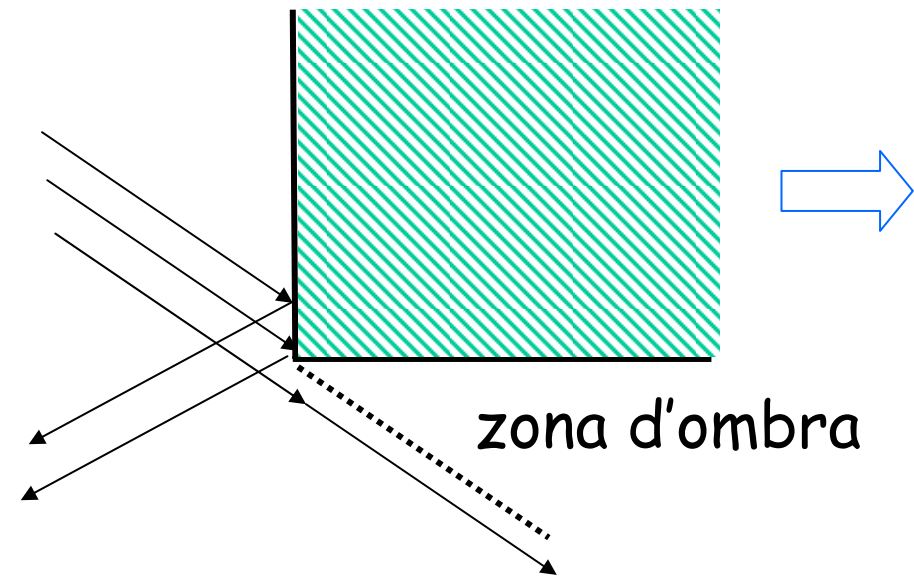
$$\frac{1}{\rho^r} = \frac{1}{\rho^i} + \frac{2}{a_0 \cos \theta^i}$$

quando l'angolo di incidenza θ^i è prossimo a 90° , il $\cos \theta^i$ diviene nullo. Pertanto, il secondo membro della relazione diviene molto elevato e il valore di ρ^r approssima lo 0.

Allora, per **grazing incidence**, il punto di incidenza (punto di riferimento per il raggio riflesso) diviene prossimo alla caustica del raggio riflesso.

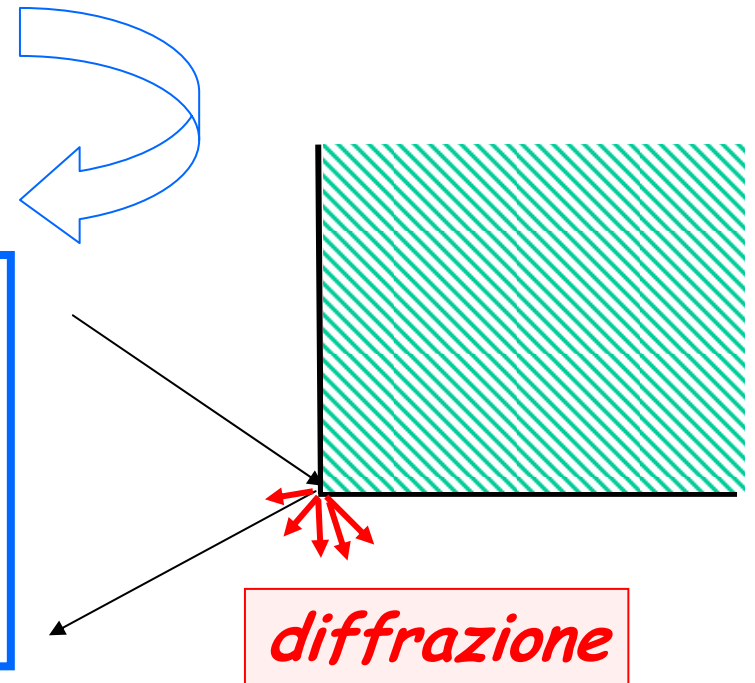
Ma in corrispondenza delle caustiche l'ottica geometrica fallisce la valutazione del campo....

Problema....



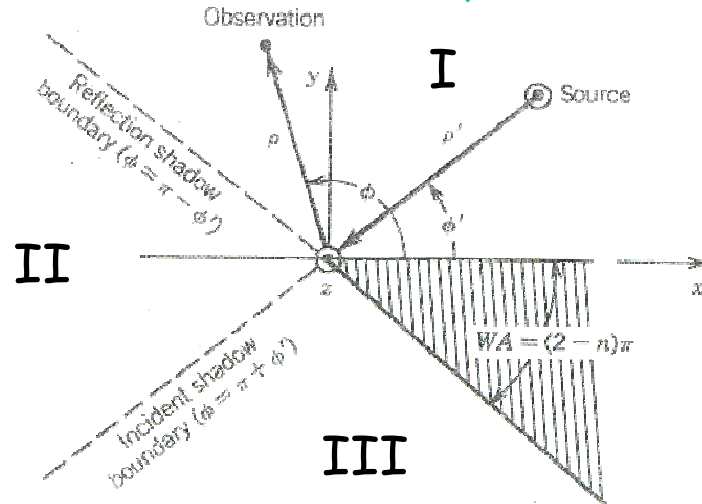
Se si studia la propagazione del campo in presenza di oggetti dielettrici, riflessione e rifrazione possono non essere sufficienti per predire correttamente la distribuzione di campo

L'ottica geometrica viene allora completata mediante la **teoria geometrica della diffrazione** per tener conto di spigoli o vertici, ovvero del fenomeno di diffrazione del campo elettromagnetico.



Diffrazione da spigoli

- Prendiamo in esame uno spigolo e una sorgente di campo em nei suoi pressi;
- considerando raggi che seguono esclusivamente le leggi dell'ottica geometrica (raggio diretto e riflesso), si può separare lo spazio intorno allo spigolo in 3 regioni:
 - Regione I: sono presenti raggi diretti e riflessi;
 - Regione II: vi sono solo raggi diretti;
 - Regione III: non vi è nessun raggio;
- nel campo em risultante vi saranno pertanto delle discontinuità in prossimità dei bordi tra le tre regioni (**R**eflection **S**hadow **B**oundary tra I e II, **I**ncident **S**hadow **B**oundary tra II e III)
- ciò non è chiaramente possibile in una reale situazione fisica, pertanto,
- per eliminare le discontinuità ai confini tra le diverse regioni e per modificare i campi in tutte e tre le regioni, deve essere incluso un campo diffratto.



Il calcolo del campo diffratto da spigoli è estremamente complesso

Uniform theory of diffraction

- La UTD aggiunge dei raggi diffratti all'ottica geometrica, così che il campo em in realtà presente nelle zone d'ombra dell'ottica geometrica può essere (più o meno...) correttamente rappresentato;
- La UTD è pertanto un metodo basato su raggi nel quale vi sono tre diversi tipi di raggio: diretto, riflesso, diffratto.

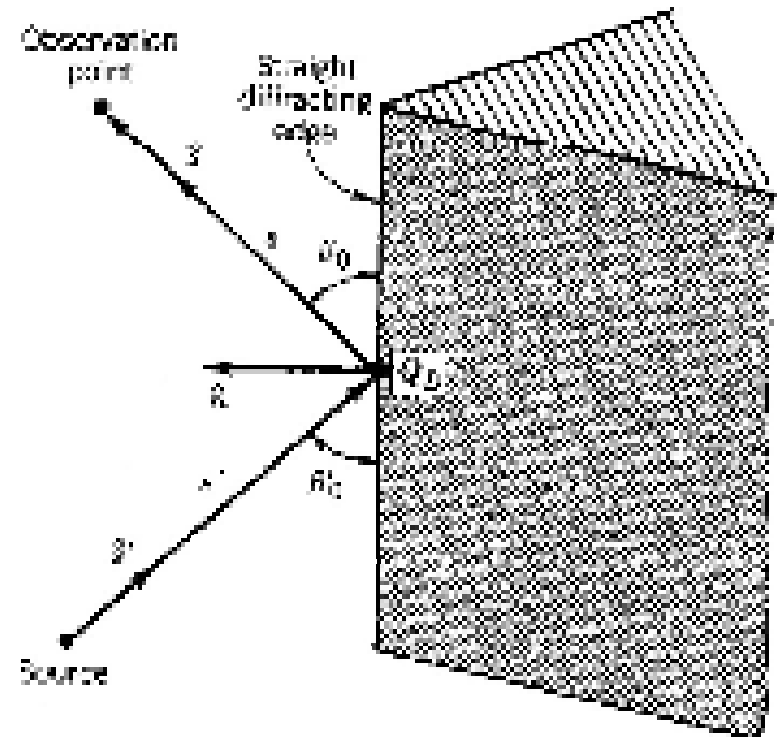
Geometrical theory of diffraction

- La prima estensione dell'ottica geometrica per tener conto del campo diffratto è stata presentata da Keller negli anni '50.
- Il lavoro classico di Keller a cui si fa riferimento è del 1962.
- Keller, aggiungendo i raggi diffratti, corresse le mancanze dell'ottica geometrica,
- tuttavia, la sua teoria *non era ancora uniforme*, nel senso che il campo diffratto diventava singolare in alcune regioni di volume, ed in particolare in corrispondenza delle regioni nell'intorno degli *shadow boundaries*. Inoltre, non era in grado di predire il valore del campo in corrispondenza delle caustiche.

Keller ipotizzò che raggi diffratti esistano ogniqualvolta un raggio illumina spigoli, angoli, vertici e quando vi è un'incidenza radente su una superficie, ovvero ogniqualvolta una superficie genera una discontinuità nel campo di ottica geometrica creando zone d'ombra

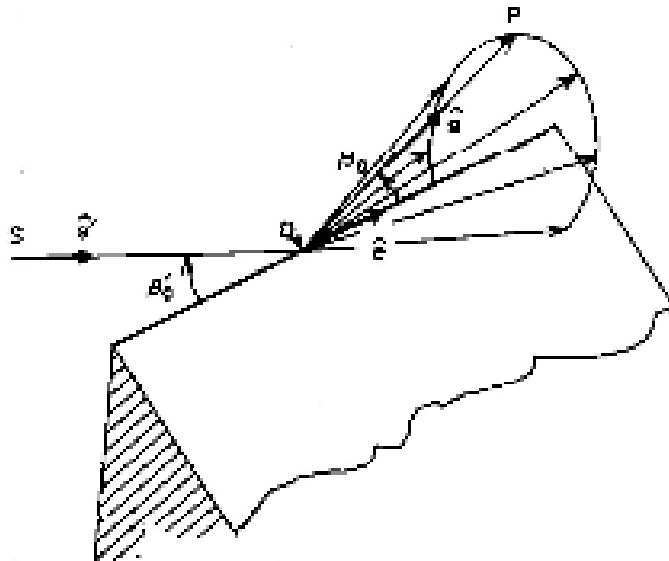
Teoria di Keller (GTD)

- Keller postulò la teoria della diffrazione partendo dal principio di Fermat generalizzato: "un raggio diffratto da uno spigolo tra un punto S ed un punto P segue una curva che ha una lunghezza ottica stazionaria tra tutte le curve tra S e P che abbiano un punto sullo spigolo".
- Pertanto, "il raggio diffratto ed il corrispondente raggio incidente formano angoli uguali con lo spigolo al punto di diffrazione, fintanto che si trovano nello stesso mezzo. Essi giacciono su lati opposti del piano ortogonale allo spigolo al punto di diffrazione".



Il cono di Keller

- Keller notò, che nel caso di raggio incidente obliquo sullo spigolo, i raggi diffratti si propagavano lungo coni aventi lo spigolo come asse.
- Il cono di raggi diffratti ha preso il nome di **cono di Keller**. Tale cono è stato determinato sperimentalmente.
- Per ogni raggio incidente su un punto dello spigolo, ve ne sono infiniti diffratti lungo le direttrici del cono di Keller.
- tra il raggio incidente proveniente da un punto S e il corrispondente diffratto passante per il punto di osservazione P , definendo in corrispondenza del punto di diffrazione un versore tangente allo spigolo (\hat{e}), in accordo alla **legge della diffrazione**, esiste la relazione



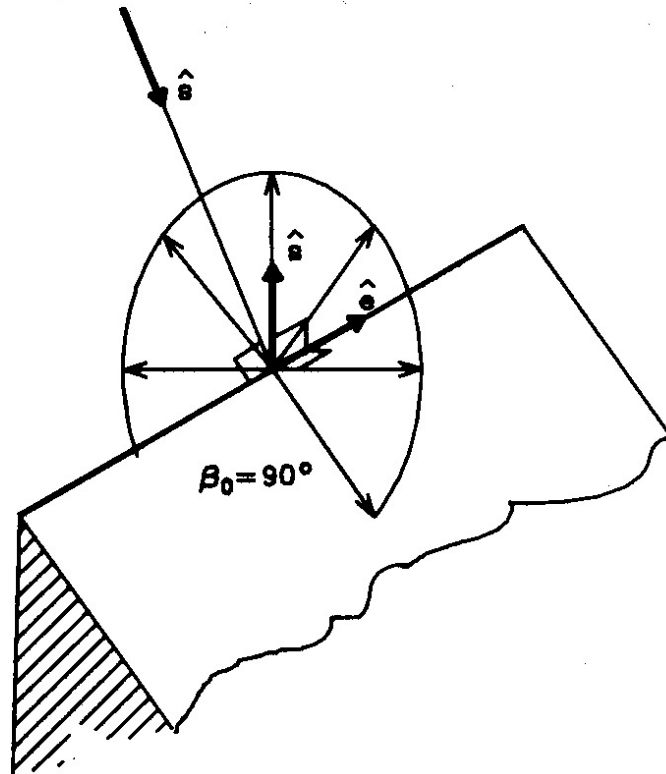
$$\sin \beta_0 = |\hat{s}' \times \hat{e}| = |\hat{s} \times \hat{e}|$$

$$\cos \beta_0 = \hat{s}' \cdot \hat{e}$$

per non avere
ambiguità di
segno...

Caso bidimensionale

- Se $\beta_0 = 90^\circ$
il raggio incidente è ortogonale allo spigolo e il cono di diffrazione degenera in un disco
- Per definizione, nel caso 2D tutti i raggi sono ortogonali allo spigolo



Principio di 'influenza locale'

- Come nella riflessione dell'ottica geometrica si suppone che il raggio riflesso dipenda dal raggio incidente e dalla superficie di incidenza solo localmente,
- così anche la diffrazione è trattata come un fenomeno puramente **locale**:
 - il raggio diffratto è influenzato dalla forma dello spigolo solo nell'intorno del punto di diffrazione,
 - il raggio diffratto è legato alle proprietà del raggio incidente prossime al punto di diffrazione
- come nell'ottica geometrica, i raggi diffratti sono caratterizzati da **ampiezza**, **fase** e **polarizzazione**.

da legge della
conservazione della
potenza in un tubo
di raggi

da lunghezza percorso

ortogonale alla
direzione di
propagazione

Raggio diffratto

- Peranto, in modo analogo ad un raggio riflesso, si può scrivere:

$$\underline{E}^d(s) = \underline{E}^i(Q_e) \underline{D} A(s) e^{-jks}$$

Campo incidente
sul punto di
diffrazione,
NOTO

termine di
fase, NOTO

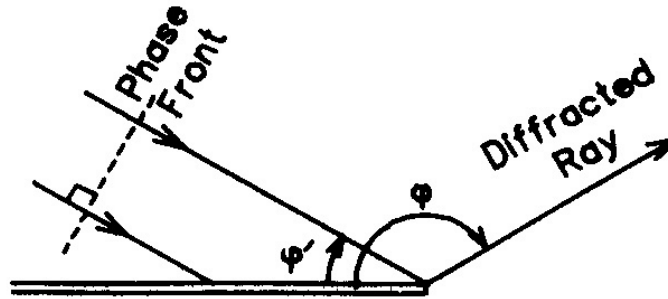
fattore divergenza

Coefficiente diffrazione diadico

Il problema è, analogamente al caso della riflessione, la determinazione del **valore iniziale** di ampiezza, fase e polarizzazione del campo; ovvero, il valore del coefficiente di diffrazione e dei raggi di curvatura del fronte d'onda diffratto.

Caso 2D

- Keller iniziò valutando la diffrazione da onda piana di un semipiano finito;
- l'intero spigolo diventa una linea di sorgente virtuale per i raggi diffratti,
- pertanto, i raggi diffratti sono delle **onde cilindriche**.



Nelle onde cilindriche un raggio di curvatura è infinito, mentre l'altro, ad un generico punto di riferimento, è finito. Pertanto, il fattore di divergenza diventa:

$$A(s) = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + s}} \quad \Longrightarrow \quad E(s) = E(0) \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + s}} e^{-jks}$$

volendo usare come punto di riferimento per la valutazione del campo la caustica (a $s = -\rho$, ovvero per $\rho \rightarrow 0$), la relazione sopra non si può più usare. Tuttavia, considerando l'ampiezza del campo nel punto s , e considerando che essa deve essere sempre la stessa a qualunque punto la si voglia riferire, si ottiene

$$|E(s)| = |E(0)| \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + s}} \quad \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \quad |E(s)| = |E(0)| \frac{1}{\sqrt{s}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}}$$

Raggio diffratto - 2D

- Keller confrontò il suo raggio diffratto cilindrico con uno sviluppo asintotico della soluzione esatta della diffrazione di un'onda piana incidente su uno semipiano finito, per ricavare

$$D_{s,h}^k(\phi, \phi') = -\frac{e^{-j\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos\frac{(\phi - \phi')}{2}} \mp \frac{1}{\cos\frac{(\phi + \phi')}{2}} \right]$$

dove s (= *soft*) e h (= *hard*) corrispondono, rispettivamente, a polarizzazione del campo incidente ortogonale o parallela al piano di incidenza.

L'utilizzo di un sistema di riferimento solidale al raggio incidente, come nel caso della riflessione, permette l'utilizzo di un coefficiente di diffrazione 2x2.

Raggio diffratto - 3D

- In modo analogo, Keller ricavò il coefficiente di diffrazione per incidenza obliqua su uno spigolo infinitamente lungo, con angolo interno pari ad α .

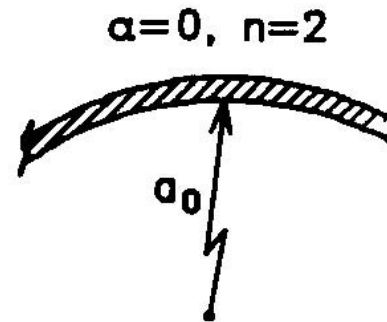
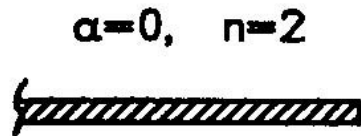
$$D_{s,h}^k(\phi, \phi', \beta, n) = \frac{-e^{-j\pi/4} \sin(\pi/n)}{2n\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \left[\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\phi - \phi'}{n}} \right) + \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\phi + \phi'}{n}} \right) \right] \quad (4.24)$$

where the interior wedge angle (α) would be related to the parameter n by

$$\alpha = (2 - n)\pi \quad (4.25)$$

Singularità nella GTD di Keller

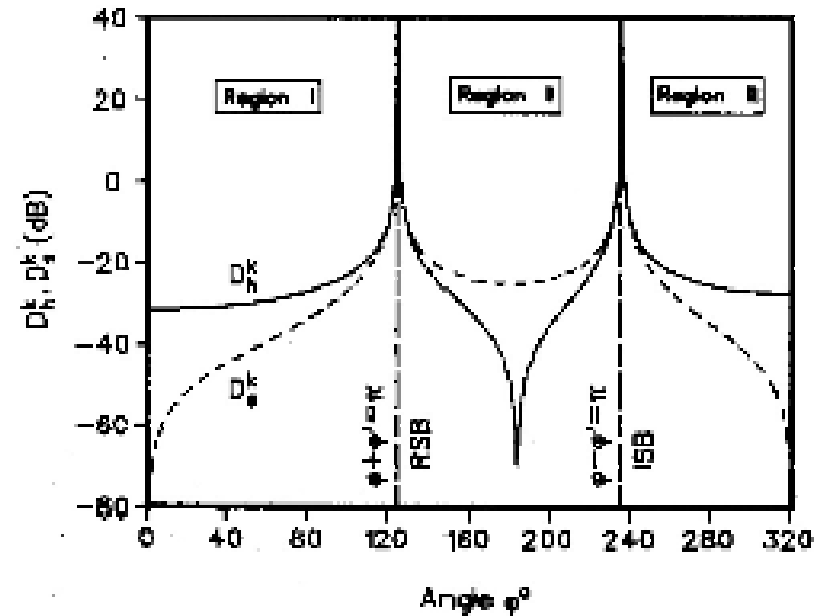
- Il problema nella GTD sviluppata da Keller è legato a non aver considerato il raggio di curvatura della superficie che genera il campo diffratto.
- Questo fa sì che un semipiano completamente piatto ed uno con un assegnato raggio di curvatura finito vengano ad avere lo stesso coefficiente di diffrazione pur, chiaramente., comportandosi in modo diverso dal punto di vista del campo em.



Teoria uniforme della diffrazione

- Pertanto, la teoria di Keller sicuramente migliora la predizione del campo da parte dell'ottica geometrica, ma rimane singolare in particolare in corrispondenza dei confini di transizione tra le regioni ombra.

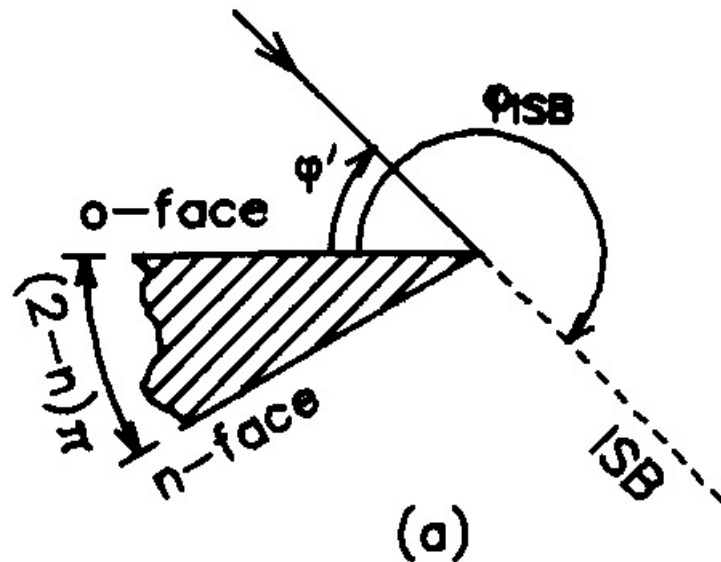
coeff. diffrazione di Keller per onda piana a 10 GHz incidente su uno spigolo



- Nel 1974 Kouyoumjian e Pathak presentano la **teoria uniforme della diffrazione**,
- essi mostrarono come, moltiplicando il coefficiente di diffrazione di Keller per un'apposita funzione di transizione, si ottenga un campo di valore finito anche in corrispondenza degli *shadow boundaries*.
- Nei punti di singolarità della GTD, la funzione di transizione deve tendere a 0 con un ordine pari a quello con cui il coefficiente di diffrazione tende ad infinito.
- Inoltre, svilupparono un coefficiente di diffrazione in grado di considerare superfici curve

o-face; n-face

- per convenzione le due facce dello spigolo vengono chiamate o-face ed n-face
- la scelta di chi è cosa, è in sostanza arbitraria;
- per convenzione, si può scegliere di misurare gli angoli ϕ' e ϕ a partire dalla o-face;
- lo spigolo ha un angolo interno pari ad $\alpha=(2-n)\pi$
- pertanto, la o-face sarà per $\phi=0$, la n-face per $\phi=n\pi$



UTD, coefficiente di diffrazione 2D- 1

The two-dimensional edge diffracted fields are given by

$$E_z^d(s) = E_z^i(Q_e) D_s \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (4.53)$$

$$H_z^d(s) = H_z^i(Q_e) D_h \frac{e^{-jks}}{\sqrt{s}} \quad (4.54)$$

where Q_e is the diffraction point on the edge. As mentioned earlier, $D_{s,h}$ are referred to as the soft and hard diffraction coefficients, respectively. The $1/\sqrt{s}$ amplitude dependence indicates that the diffracted fields have cylindrical wavefronts originating at the edge. The edge thus acts as a virtual line source (and caustic) for the diffracted fields. We shall see later that the $1/\sqrt{s}$ term is a special case of a more general spreading factor that holds when the edge is straight and a cylindrical wave is incident upon the edge.

The two-dimensional UTD edge diffraction coefficients are given by

$$D_{s,h}(L^i, L^{ro}, L^m, \phi, \phi', n) = D_1 + D_2 + R_{s,h}(D_3 + D_4) \quad (4.55)$$

where $R_{s,h}$ are the soft and hard reflection coefficients of the surfaces of the wedge at the edge, respectively, and L^i, L^{ro} , and L^m are the so-called distance parameters; we shall return to them shortly. For a conducting wedge we find that $R_{s,h}$ is given by (4.8); that is, $R_{s,h} = \mp 1$. The components of the diffraction coefficients in (4.55) are given by

$$D_1 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cot\left[\frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n}\right] F[kL^i a^+(\phi - \phi')] \quad (4.56)$$

$$D_2 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cot\left[\frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n}\right] F[kL^i a^-(\phi - \phi')] \quad (4.57)$$

$$D_3 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cot\left[\frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n}\right] F[kL^m a^+(\phi + \phi')] \quad (4.58)$$

$$D_4 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \cot\left[\frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n}\right] F[kL^m a^-(\phi + \phi')] \quad (4.59)$$

In the two-dimensional case it is assumed that the incident fields have cylindrical wavefronts, so that the distance parameters in the diffraction coefficients are given by

$$L^i = \frac{s's}{s + s'} \quad (4.60)$$

$$L^{ro} = \frac{\rho^{ro}s}{\rho^{ro} + s} \quad (4.61)$$

$$L^m = \frac{\rho^m s}{\rho^m + s} \quad (4.62)$$

The reasons that the distance parameters assume the forms that they do will become apparent in the next section. Two distance parameters are required for each face of the wedge. One parameter of every face is associated with the incident shadow boundary (L^i), and the other with the reflection shadow boundary ($L^{ro,n}$). The same parameter (L^i) is used for the terms associated with the incident shadow boundaries of the two faces, but different parameters are used for the terms associated with the reflection shadow boundaries of the o -face (L^{ro}) and n -face (L^{rn}).

The distances s' and s are the distances from the line source to the diffraction point and from the diffraction point to the field point, respectively. We see that L^{ro} and L^{rn} are functions of ρ^{ro} and ρ^{rn} , respectively; the caustic distances ρ^{ro} and ρ^{rn} are for their part functions of the radii of curvature (a_o and a_n) of the o -face and n -face at Q_e , respectively, and given by

$$\frac{1}{\rho^{ro,n}} = \frac{1}{s'} + \frac{2}{a_{o,n} \cos\theta_{o,n}} \quad (4.63)$$

These caustic values also can be interpreted as the principal radii of curvature of the reflected wavefronts at the point of diffraction. Because the two faces can have different radii of curvature, a different distance parameter is required for the term associated with the RSB of each face.

The definitions of the other parameters are as follows:

$a_{o,n}$ = radii of curvature of the o -face and n -face, respectively, at the point of diffraction. Recall from Chapter 3 that $a_{o,n} > 0$ when the o - or n -face presents a convex surface to the incident ray and that $a_{o,n} < 0$ when the o - or n -face presents a concave surface to the incident ray.

ϕ' = the incident angle with respect to the o -face, with $0 \leq \phi' \leq n\pi$.

ϕ = the diffraction angle with respect to the o -face, with $0 \leq \phi \leq n\pi$.

$\hat{n}_{o,n}$ = unit vectors normal to the o -face and n -face, respectively, at the point of diffraction.

θ_o = angle defined by $\hat{n}_o \cdot \hat{s}' = -\cos\theta_o$, with $\cos\theta_o \geq 0$.

θ_n = angle defined by $\hat{n}_n \cdot \hat{s}' = -\cos\theta_n$, with $\cos\theta_n \geq 0$.

UTD, coefficiente di diffrazione 2D - 2

Finally, we consider the definitions of the functions a^+ , a^- , and F that occur in (4.56)–(4.59). Because we are dealing with an asymptotic method, we require a so-called largeness parameter κ to be bigger than a minimum value. In the case of the UTD,

$$\kappa = kL \sin^2 \beta_0 \quad (4.64)$$

where L represents any of the distance parameters in (4.56)–(4.59). In the two-dimensional case, $\beta_0 = \pi/2$, so that

$$\kappa = kL \quad (4.65)$$

The limitations on κ are discussed in Section 4.4.4. To ensure the validity of the asymptotic solution, the diffraction coefficients can be used only when $\kappa > 1$, unless the parameter n is close to 1 when $\kappa > 3$ [16].

The functions a^\pm are defined as

$$a^\pm(\beta^\pm) = 2 \cos^2 \left(\frac{2n\pi N^\pm - \beta^\pm}{2} \right) \quad (4.66)$$

where

$$\beta^\pm = \phi \pm \phi' \quad (4.67)$$

and N^\pm are integers that most nearly satisfy the equations.

$$2\pi n N^+ - (\phi \pm \phi') = \pi \quad (4.68)$$

$$2\pi n N^- - (\phi \pm \phi') = -\pi \quad (4.69)$$

Note that a^+ and N^+ are associated with the n -face and that a^- and N^- are associated with the o -face. Figure 4.15 shows N^+ and N^- as functions of $\phi \pm \phi'$ and n . The trapezoidal regions bounded by the solid straight lines represent permissible values of $\phi \pm \phi'$ for $0 \leq \phi \leq n\pi$ and $0 \leq \phi' \leq n\pi$ with $1 \leq n \leq 2$. N^+ can take on the values 0 and 1, whereas N^- can take on the values -1 , 0, and 1.

From Figure 4.15 we see that N^\pm are stable in the regions around the shadow boundaries indicated by the dotted lines, in the sense that there are no abrupt changes in N^\pm across any shadow boundary. Table 4.1 shows the values of N^\pm at the four possible shadow boundaries. From Figure 4.15 we see that, for the first three cases in Table 4.1, N^+ and N^- are different from zero only at angular distances greater than π from the shadow boundaries. In such cases the field point usually is outside the transition region. Assuming that κ is not too small, as indicated, we

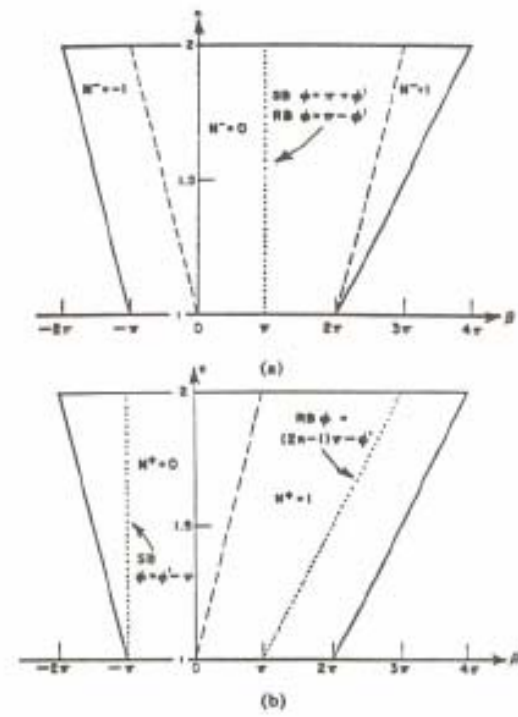


Figure 4.15 N^+ and N^- as functions of $\beta = \phi \pm \phi'$ and n for the (a) o -face and (b) n -face. The trapezoidal region bounded by the solid lines represents the permissible values of $(\phi \pm \phi')$ $1 \leq n \leq 2$ (from [16] © 1974 IEEE, reprinted with permission).

Table 4.1
Shadow Boundaries

Shadow Boundary		Location	Value of N at Boundary
n -face shadowed	ISB	$\phi_{ISA} - \phi' = \pi$	$N^+ = 0$
o -face shadowed	ISB	$\phi_{ISA} - \phi' = -\pi$	$N^+ = 0$
Reflection from o -face	RSB	$\phi_{RSA} + \phi' = \pi$	$N^- = 0$
Reflection from n -face	RSB	$\phi_{RSB} + \phi' = (2n - 1)\pi$	$N^+ = 1$

UTD, coefficiente di diffrazione 2D - 3

are justified [16] in assuming the values of N^2 in Table 4.1 and replacing a^\pm in (4.56), (4.57), and (4.59) with

$$a(\phi \pm \phi') = 2 \cos^2\left(\frac{\phi \pm \phi'}{2}\right) \quad (4.70)$$

and a^\pm in (4.58) with

$$a^\pm(\phi + \phi') = 2 \cos^2\left[\frac{2\pi n - (\phi + \phi')}{2}\right] \quad (4.71)$$

The function F is the transition function given by

$$F(x) = 2j\sqrt{x} e^{jx} \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \sqrt{u} e^{-u^2} du \quad (4.72)$$

in which we take the principal (positive) branch of the square root. Note that the integral part of the transition function resembles a Fresnel integral (see (4.14)). The transition function is discussed in more detail in Appendix B. A computer routine is given in Appendix F, together with routines for calculating the diffraction coefficients. For values of $x < 0.3$, the small argument form of the transition function is given by

$$F(x) \approx \left(\sqrt{\pi x} - 2x e^{j\pi/4} - \frac{2x^2 e^{-j\pi/4}}{3} \right) e^{j\pi(x+\pi/4)} \quad (4.73)$$

For values of $x > 5.5$, the large argument form of the transition function is given by

$$F(x) = 1 + j\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x^2} - j\frac{15}{8x^3} + \frac{75}{16x^4} \quad (4.74)$$

For values of $0.3 \approx x \approx 5.5$, an interpolation scheme can be used to determine the values of $F(x)$ [27]. When $x < 0$, the transition function is evaluated as

$$F(x) = F^*(|x|) \quad (4.75)$$

where the asterisk indicates complex conjugate [27]. The amplitude and phase of the transition function are plotted in Figure 4.16.

There are several distinct differences between the diffraction coefficients in (4.55) to (4.59) and Keller's original diffraction coefficients, given in (4.24). The most obvious differences are the transition functions ($F[x]$) and the fact that now there are four terms instead of Keller's original two. Four terms are needed, as

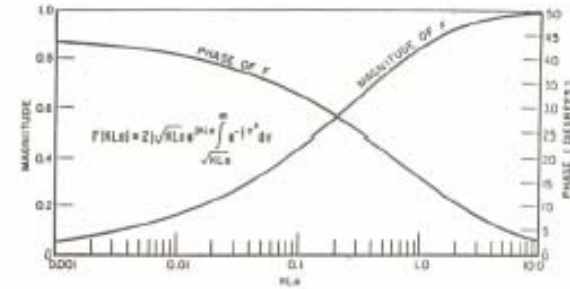


Figure 4.16 Transition function (from [16] © 1974 IEEE, reprinted with permission).

both faces can create incident shadow boundaries and reflection shadow boundaries. We see that D_1 in (4.55) is associated with the diffracted field that compensates for the discontinuity in the GO field when the o -face is shadowed; D_2 , when the n -face is shadowed; D_3 , when there is reflection from the n -face; and D_4 , when there is reflection from the o -face. The contribution of a single face to the wedge-diffracted field is discussed in [33].

The interpretation of $\theta_{o,n}$ when one of the faces is not illuminated requires careful consideration. Although the caustic distance of reflection given in (4.63) can be readily evaluated when calculating the GO reflected field from a curved surface, evaluation for use of this term in the UTD diffraction coefficients requires greater care in some instances.

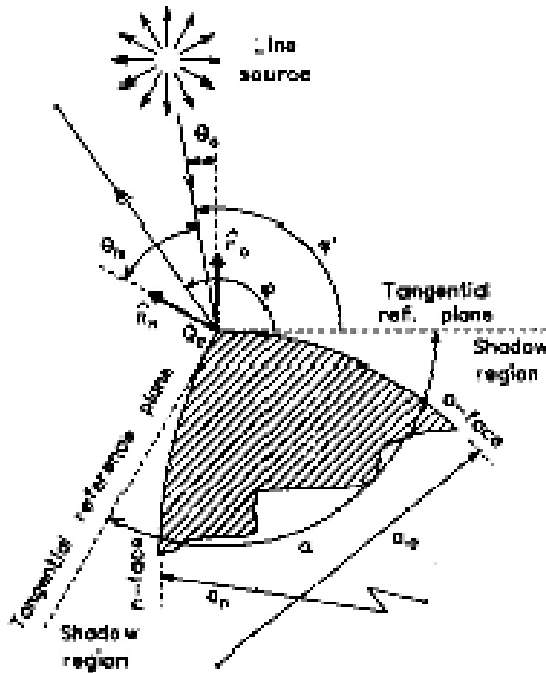
Consider for example the case where the o -face is illuminated and the n -face is not, both faces being convex, as shown in Figure 4.17(a). The unit vectors $\hat{\mathbf{n}}_o$ and $\hat{\mathbf{n}}_n$ are normal to the o - and n -faces at Q_o , respectively, with $\hat{\mathbf{n}}_o = -\hat{\mathbf{n}}_n$. Note that the o -face is illuminated only when $\hat{\mathbf{n}}_o \cdot \hat{\mathbf{s}}' < 0$, and similarly for the n -face. The location of the reflection shadow boundary linked to the o -face can be determined from Figure 4.13. Because the n -face is not illuminated in this case, no RSB is connected with it. However, in their reply to Cashman's enquiries [34], Kouyoumjian and Pathak indicate that a *virtual reflection shadow boundary* (VRSB) exists for the n -face and that, in this case, this VRSB should be accounted for when evaluating $\rho^{(n)}$.

Whereas the RSB for the n -face normally is found by considering the reflection of the incident ray with respect to $\hat{\mathbf{n}}_n$, the VRSB is found by considering the virtual reflection of the incident ray with respect to $\hat{\mathbf{n}}_o$, shown in Figure 4.17(a). In essence,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' = -\cos\theta_{o,n} \quad (4.76)$$

UTD vs GTD

- Vi sono diverse differenze tra la UTD e la teoria di Keller. In particolare,
 - vi è la presenza della funzione di transizione che mantiene sempre finito il campo calcolato,
 - il coefficiente è dato dalla somma di 4 termini e non 2, per tener conto che entrambe le facce dello spigolo possono generare degli *incident shadow boundaries*, e *reflected shadow boundaries*



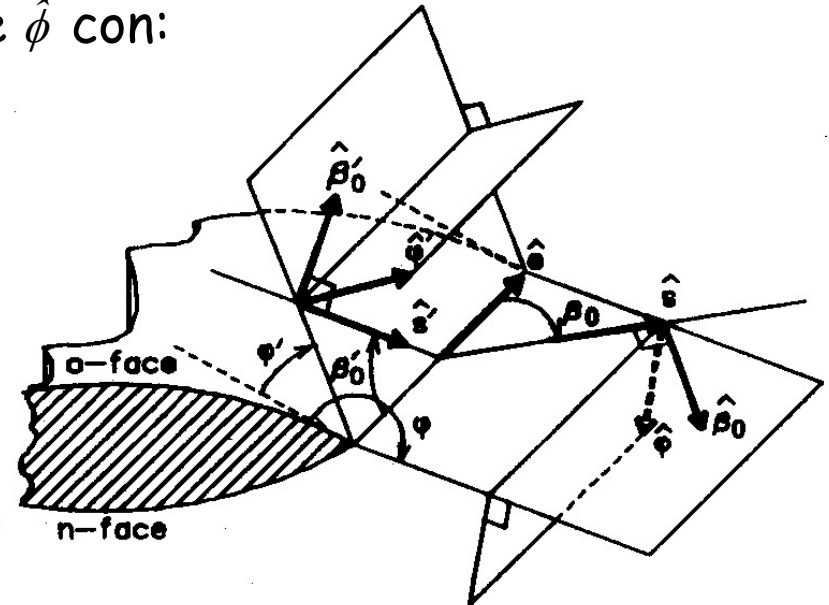
UTD 3D: sistema di riferimento locale

- Nel caso di riflessione dei campi di ottica geometrica, l'utilizzo di un sistema di riferimento solidale al raggio permette di scomporre il campo incidente in una componente parallela ed una perpendicolare, così che il coefficiente di riflessione rimane espresso tramite una matrice 2×2
- nel caso di diffrazione da spigolo un analogo sistema di riferimento porterebbe ad un coefficiente di diffrazione 3×3 con 7 elementi non nulli.
- Tuttavia, anche nel caso di diffrazione si può ottenere un coefficiente esprimibile come matrice 2×2 , nel caso in cui il sistema di riferimento sia solidale al piano di incidenza associato allo spigolo (cioè il piano contenente \hat{e} e \hat{s}').
- In questo caso il campo incidente viene scomposto in componente parallela e perpendicolare al piano di diffrazione e il coefficiente di diffrazione si riduce ad una matrice 2×2 diagonale.

Sistema di riferimento - 1

- Considerato il punto Q_e sullo spigolo, il versore unitario tangente allo spigolo in Q_e è \hat{e}
- Il campo incidente si scompone lungo $\hat{\beta}'_0$ e $\hat{\phi}'$, mentre il campo diffratto avrà componenti lungo $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\phi}$ con:

$$\hat{\phi}' = \frac{-\hat{e} \times \hat{s}'}{|\hat{e} \times \hat{s}'|} \quad \hat{\beta}'_0 = \hat{\phi}' \times \hat{s}'$$
$$\hat{\phi} = \frac{\hat{e} \times \hat{s}}{|\hat{e} \times \hat{s}|} \quad \hat{\beta}_0 = \hat{\phi} \times \hat{s}$$



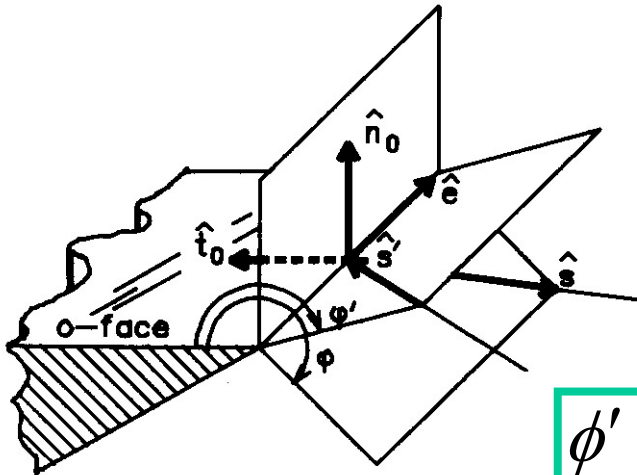
- Da notare che i versori appena definiti non lo sono più chiaramente nel caso in cui $\beta_0 \rightarrow 0$ (il piano di incidenza non è più ben definito..)
- Campi polarizzati lungo β_0 sono in polarizzazione ortogonale (soft) al piano di diffrazione; quelli lungo ϕ in polarizzazione parallela (hard)

Sistema di riferimento - 2

- β'_0 e β_0 sono misurati a partire da lati opposti dell'asse dello spigolo;
- per valutare correttamente gli angoli ϕ e ϕ' , si considerano i versori \hat{n}_0 e \hat{t}_0 ;
- le componenti di s ed s' che giacciono nel piano ortogonale allo spigolo, risultano:

$$s'_t = |\hat{s}' - (\hat{s}' \cdot \hat{e})\hat{e}| \quad s_t = |\hat{s} - (\hat{s} \cdot \hat{e})\hat{e}|$$

- si possono pertanto definire i versori



$$\hat{s}'_t = \frac{\hat{s}' - (\hat{s}' \cdot \hat{e})\hat{e}}{|\hat{s}' - (\hat{s}' \cdot \hat{e})\hat{e}|}$$

$$\hat{s}_t = \frac{\hat{s} - (\hat{s} \cdot \hat{e})\hat{e}}{|\hat{s} - (\hat{s} \cdot \hat{e})\hat{e}|}$$

$$\phi' = \pi - [\pi - \arccos(-\hat{s}'_t \cdot \hat{t}'_0)] \operatorname{sgn}(-\hat{s}'_t \cdot \hat{n}_0)$$

$$\phi = \pi - [\pi - \arccos(-\hat{s}_t \cdot \hat{t}_0)] \operatorname{sgn}(-\hat{s}_t \cdot \hat{n}_0)$$

UTD, coefficiente di diffrazione 3D - 1

6.3 THREE-DIMENSIONAL UTD DIFFRACTION COEFFICIENTS

The three-dimensional first-order UTD diffracted fields from a general three-dimensional wedge now can be expressed in the edge fixed coordinate system as

$$\begin{bmatrix} E_{\beta_0}^d \\ E_{\phi}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\beta_0}^i(Q_e) \\ E_{\phi}^i(Q_e) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{s(s+\rho)}} e^{-jk_s} \quad (6.13)$$

where $D_{s,h}$ are soft and hard diffraction coefficients, ρ is the edge caustic distance, and s is the distance from the point of diffraction (Q_e) on the edge to the field point. The incident and diffracted field components are given by

$$\mathbf{E}^i = E_{\beta_0}^i \hat{\beta}_0 + E_{\phi}^i \hat{\phi} \quad (6.14)$$

$$\mathbf{E}^d = E_{\beta_0}^d \hat{\beta}_0 + E_{\phi}^d \hat{\phi} \quad (6.15)$$

An arbitrary polarized incident field can be resolved into edge-fixed components as follows:

$$E_{\beta_0}^i = \mathbf{E}^i \cdot \hat{\beta}_0 \quad (6.16)$$

$$E_{\phi}^i = \mathbf{E}^i \cdot \hat{\phi} \quad (6.17)$$

Equation (6.13) also can be expressed in dyadic form as

$$\mathbf{E}^d = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{D} \sqrt{\frac{\rho}{s(s+\rho)}} e^{-jk_s} \quad (6.18)$$

where the dyadic diffraction coefficient is given by

$$\mathbf{D} = -\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_0 D_s - \hat{\phi} \hat{\phi} D_h \quad (6.19)$$

Note that the minus signs in (6.13) and (6.19) follow from the way in which the unit vectors are defined.

Some authors [3] use the notation E_1^i and E_2^i when referring to $E_{\beta_0}^i$ and E_{ϕ}^i , respectively, and E_1^d and E_2^d when referring to $E_{\beta_0}^d$ and E_{ϕ}^d , respectively.

The three-dimensional diffraction coefficients are given by

$$D_{s,h}(L^i, L^m, L^n, \phi, \phi', \beta_0, n) = D_1 + D_2 \mp (D_3 + D_4) \quad (6.20)$$

where \mp are the soft and hard reflection coefficients of the perfectly conducting surfaces of the wedge at the edge, respectively. The components of the diffraction coefficients are given by

$$D_1 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \cot\left[\frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n}\right] F[kL^i a^+(\phi - \phi')] \quad (6.21)$$

$$D_2 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \cot\left[\frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n}\right] F[kL^i a^-(\phi - \phi')] \quad (6.22)$$

$$D_3 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \cot\left[\frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n}\right] F[kL^m a^+(\phi + \phi')] \quad (6.23)$$

$$D_4 = \frac{-e^{-j\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k} \sin\beta_0} \cot\left[\frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n}\right] F[kL^m a^-(\phi + \phi')] \quad (6.24)$$

where the transition function (F) and associated functions $a^{\pm}(\beta)$ are exactly the same as in the two-dimensional case. Comparison of (6.20)–(6.24) with (4.55)–(4.59) show that the two-dimensional coefficients are just special cases of the three-dimensional coefficients, because $\sin\beta_0 = 1$ in the two-dimensional case.

The distance parameters for three-dimensional diffraction are considerably more complicated than in the two-dimensional case. The distance parameter L^i associated with the incident shadow boundaries is given by

UTD, coefficiente di diffrazione 3D - 2

$$L^i = \frac{s(\rho_1^i + s)\rho_2^i}{\rho_1^i(\rho_1^i + s)(\rho_2^i + s)} \sin^2 \beta_0 \quad (6.25)$$

where ρ_1^i is the principal radius of curvature of the incident wavefront at Q_e in the plane of incidence (containing \hat{s}' and \hat{n}) and ρ_2^i is the principal radius of curvature of the incident wavefront in the plane transverse to the plane of incidence. The radius of curvature of the incident wavefront in the edge-fixed plane of incidence is ρ_1^i . In the case where the incident field has a spherical wavefront, $\rho_{1,2}^i = \rho_1^i = s'$, where s' is the radius of curvature of the spherical wavefront. L^i then reduces to

$$L^i = \frac{ss'}{s + s'} \sin^2 \beta_0 \quad (6.26)$$

In the case of plane wave incidence, L^i reduces to

$$L^i = s \sin^2 \beta_0 \quad (6.27)$$

The distance parameters associated with the reflection shadow boundaries are given by

$$L^{o,n} = \frac{s(\rho_e^{o,n} + s)\rho_1^{o,n}\rho_2^{o,n}}{\rho_e^{o,n}(\rho_1^{o,n} + s)(\rho_2^{o,n} + s)} \sin^2 \beta_0 \quad (6.28)$$

where $\rho_1^{o,n}$ and $\rho_2^{o,n}$ are the principal radii of curvature of the reflected wavefront from the o - and n -faces, respectively.

The principal radius of curvature of the reflected wavefront in the plane of incidence was discussed in Section 3.5. For convenience, the relevant expressions are repeated here:

$$\frac{1}{\rho_1^i} = \frac{1}{\rho_1^i} + \frac{2}{a_1 \cos \theta'} \quad (6.29)$$

where a_1 is the radius of curvature of the surface at Q_e in the plane of incidence. The principal radius of curvature of the reflected wavefront in the transverse plane is given by

$$\frac{1}{\rho_2^i} = \frac{1}{\rho_2^i} + \frac{2 \cos \theta'}{a_2} \quad (6.30)$$

where a_2 is the radius of curvature of the surface at Q_e in the plane transverse to the plane of incidence. In Section 4.4.2 we saw that the caustic distance of reflection in the plane of incidence can be expressed as

$$\frac{1}{\rho_1^i} = \frac{1}{\rho_1^i} - \frac{2}{a_1(\hat{s}' \cdot \hat{n})} \quad (6.31)$$

where $a_1 > 0$ if the o - or n -face is convex, and $a_1 < 0$ if it is concave. Similarly, we can express ρ_2^i as

$$\frac{1}{\rho_2^i} = \frac{1}{\rho_2^i} - \frac{2(\hat{s}' \cdot \hat{n})}{a_2} \quad (6.32)$$

Note that (6.31) and (6.32) may be applied to either the o - or n -face, so that \hat{n} is the unit vector perpendicular to the o - or n -face (\hat{n}_o or \hat{n}_n), respectively. The case where the plane of incidence is different from the principal planes is discussed in [1].

The distances $\rho_e^{o,n}$ are the radii of curvature of the reflected wavefront in the plane containing the reflected ray and the edge (\hat{e}), so that

$$\frac{1}{\rho_e^{o,n}} = \frac{1}{\rho_e^i} - \frac{2(\hat{n}_e \cdot \hat{n}_{o,n})(\hat{s}' \cdot \hat{n}_{o,n})}{|a_e| \sin^2 \beta_0} \quad (6.33)$$

where $\hat{n}_{o,n}$ are the unit vectors normal to the o - and n -faces at Q_e , respectively; a_e is the radius of curvature of the edge at Q_e ; and \hat{n}_e is the unit vector normal to the edge at Q_e .

Consider for a moment the concept of \hat{n}_e , the unit vector normal to the edge. The unit vector normal to a surface ($\hat{n}_{o,n}$) is easy to visualize. An edge, however, is a curve in space, with an infinite number of possible unit vectors normal to it at any given point. The diffracted rays in the case where $\beta_0 = 90^\circ$ as shown in Figure 4.6, illustrate the point. How do we determine which of these unit vectors is \hat{n}_e ? For the purpose of this section, a simple explanation is in order; a more complete treatment of the radius of curvature of a curve in space and the associated normal vector is given in Appendix C.

Consider the general case of a curve in space as shown in Figure C.1 in Appendix C. At any point (Q) on the curve, it will have a radius of curvature a_e , such that we can fit a circle (known as the *osculating circle*) with radius a_e "into" the curve at Q . The unit vector \hat{n}_e then is the radial unit vector of the circle at that point. Figure 6.4 (a) shows the case where a paraboloid is intercepted by a plane parallel to the x - y plane, so that the curve (C) where the plane and the paraboloid intercept is a circle. The center of curvature of C then is the center of the circle on the z -axis; the curve C being the osculating circle in this case. The unit vector \hat{n}_e at the point Q_e where C intercepts the y - z plane is $\hat{n}_e = \hat{y}$. In Figure 6.4 (b), a plane parallel to the x - z plane intercepts the paraboloid, so that $\hat{n}_e = -\hat{x}$ at Q_e . In Figure 6.4 (c), the paraboloid is intercepted by an oblique plane

UTD, coefficiente di diffrazione 3D - 3

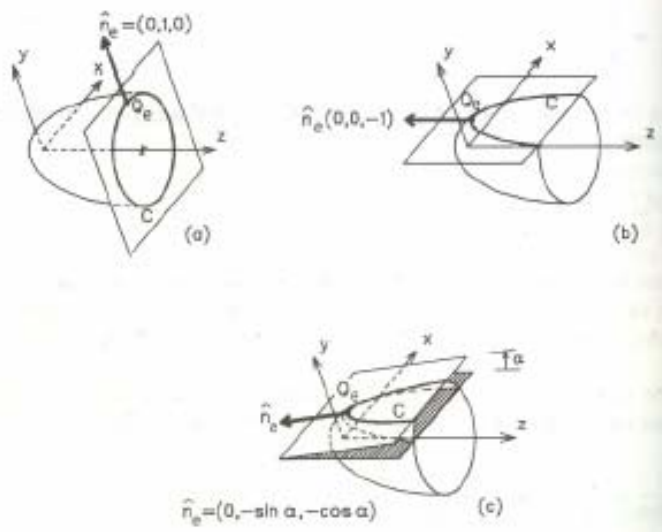


Figure 6.4 Paraboloid intercepted by various planes, showing \hat{n}_e . Intercepting planes: (a) parallel to x - y plane; (b) parallel to x - z plane; and (c) tilted with respect to x - z plane.

tilted at an angle α relative to the x - z plane. In this case, $\hat{n}_e = \sin\alpha \hat{y} - \cos\alpha \hat{z}$ at Q_e .

The edge caustic (ρ) contained in the spreading factor of (6.13) is given by

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_e'} - \frac{\hat{n}_e \cdot (\hat{s}' - \hat{s})}{|a_e| \sin^2 \beta_0} \quad (6.34)$$

where a_e is the radius of curvature of the edge at Q_e and ρ_e' is the radius of curvature of the incident wavefront at Q_e in the edge-fixed plane of incidence; that is, the plane containing \hat{s}' and \hat{e} .

Let us digress for a moment to consider the case where $s > \rho$ and $\rho < 0$. Following the discussion in Chapter 3, we should evaluate the spreading factor as

$$\sqrt{\frac{\rho}{s(\rho + s)}} = \pm j \sqrt{\frac{|\rho|}{s(s + \rho)}} \quad (6.35)$$

where the plus sign would be chosen if the propagation were in a direction through the caustic. Note that ρ actually is the second caustic distance related to the edge, as the edge itself also is a caustic.

By changing the radius of curvature of the edge at a point Q_e , the caustic distance ρ is affected, which, in turn, will affect the diffracted field from Q_e . This principle has been applied to reduce the diffracted fields from a parabolic compact range reflector [4].

Consider now the special case where the edge is straight; that is, $a_e \rightarrow \infty$. From (6.34), we thus have $\rho = \rho_e'$, so that the spreading factor in (6.13) reduces to

$$\sqrt{\frac{\rho}{s(s + \rho)}} = \sqrt{\frac{\rho_e'}{\rho_e' + s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (6.36)$$

In the case where a cylindrical wave is incident upon the straight edge (as in the two-dimensional case), the radius of curvature of the incident wavefront in the plane containing \hat{s}' and \hat{e} (ρ_e') is infinite so that

$$\sqrt{\frac{\rho}{s(s + \rho)}} = \frac{e^{-j\kappa s}}{\sqrt{s}} \quad (6.37)$$

The diffracted field therefore also will have a cylindrical wavefront. Note that (6.37) is exactly the form described in the two-dimensional case in Chapter 4. We thus have shown that the two-dimensional case actually is a special case of the three-dimensional case.

Whenever $s \gg \rho$, such as when $|\rho| < \infty$ and $s \rightarrow \infty$, we find that

$$\sqrt{\frac{\rho}{s(s + \rho)}} = \frac{\sqrt{\rho}}{s} \quad (6.38)$$

In the three-dimensional case, the largeness parameter (as far as the asymptotic approximation is concerned) is

$$\kappa = kL \sin^2 \beta_0 \quad (6.39)$$

In Section 4.4.4, we mentioned that $\kappa > 1$ for the UTD to be valid. This condition can be violated if the frequency is too low or if s' or s is too small; that is, the source point or field point is too close to the point of diffraction. In the three-dimensional case, a small angle β_0 also can result in κ being unacceptably small; this happens when the incident rays are in the paraxial region close to the edge. Additional coefficients that extend the validity of the UTD in these regions have been developed [5]. Incident rays in the paraxial region also give rise to edge waves [6].