

quindi le componenti di  $\mathbf{E}(t)$  come *segnali analitici*, tramite una notazione analoga a quella complessa introdotta nel caso monocromatico:

$$\begin{aligned} E_x^a(t) &= a_x(t) e^{j\phi_x(t)} \\ E_y^a(t) &= a_y(t) e^{j\phi_y(t)} \\ E_z^a(t) &= a_z(t) e^{j\phi_z(t)} \end{aligned} \quad \text{con } a_k \in |E_k| \quad \text{modulo di } E_k \quad (3.7)$$

A differenza di quest'ultimo, il modulo e l'anomalia del numero complesso associato a ciascuna componente sono funzioni del tempo, ma rimangono apprezzabilmente costanti nell'intorno, dell'ordine di  $T_0$ , di un generico istante. Corrispondentemente, il vettore complesso analitico, ottenuto a partire dalle componenti (3.7),

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = a_x(t)\mathbf{x}_0 e^{j\phi_x(t)} + a_y(t)\mathbf{y}_0 e^{j\phi_y(t)} + a_z(t)\mathbf{z}_0 e^{j\phi_z(t)} = \mathbf{E}_r(t) + j\mathbf{E}_j(t)$$

varia lentamente nel tempo. Analogamente al caso monocromatico, il vettore funzione del tempo  $\mathbf{E}(t)$  si ottiene dalla (3.4):

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_r(t) \cos \omega t - \mathbf{E}_j(t) \sin \omega t \quad (3.8)$$

Lo stato di polarizzazione del campo descritto dalla (3.8) è a sua volta variabile lentamente nel tempo: l'estremo libero di  $\mathbf{E}(t)$  descrive curve che, nell'intorno (dell'ordine di  $T_0$ ) di un generico istante, sono ellissi, ma la cui inclinazione e il cui rapporto assiale variano apprezzabilmente su tempi  $t \gg T_0$ . In questo caso il campo è parzialmente polarizzato.

L'introduzione dei vettori analitici consente di descrivere quantità quasi monocromatiche con un formalismo identico a quello del caso armonico permanente.

### 3.1.2.1 Problema

Un vettore ha componenti  $E_x(t) = \sin(\omega_0 t)$ , e  $E_z(t) = \sin(\Omega_0 t) \cdot \cos(\omega_0 t)$  con  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  e  $\Omega_0 = 20\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Determinare la polarizzazione del campo al variare del tempo  $t$  tra 0 e 0.1 s.

## 3.2 La costante dielettrica nel dominio della frequenza

Consideriamo le caratteristiche dei parametri elettromagnetici di un mezzo nel dominio della frequenza, assumendo quindi variazioni sinusoidali delle varie grandezze. L'analisi è limitata alla costante dielettrica nei casi rilevanti di mezzi rarefatti non polari e di mezzi densi polari ed è successivamente estesa alla conducibilità. Modelli analoghi possono essere elaborati per la permeabilità magnetica di materiali particolari.

Le proprietà dielettriche di un materiale sono descritte dalla costante dielettrica  $\epsilon$ , espressa in funzione del momento di dipolo elettrico per unità di volume  $P$  indotto dal campo elettrico

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \right)$$

## 3.2 LA COSTANTE DIELETTRICA...

in cui si è assunto  $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$  (mezzo isotropo). Dal momento che

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t)$$

nel dominio della frequenza, per un mezzo lineare,

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\omega) + \mathbf{P}(\omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

Per determinare la costante dielettrica  $\epsilon$  alla pulsazione  $\omega$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)} \right] \quad (3.9)$$

si deve quindi stabilire il legame tra polarizzazione e campo elettrico a quella pulsazione.

### 3.2.1 Mezzi non polari con cariche vincolate

Consideriamo un materiale non polare, costituito da un aggregato di cariche di segno opposto, la cui distribuzione spaziale, in assenza di campo elettrico, è tale da far coincidere il baricentro delle cariche positive con quello delle cariche negative (Fig. 3.3a). Un

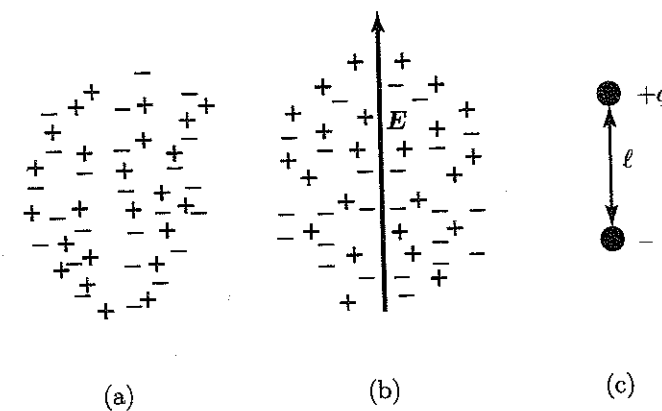


Figura 3.3: Distribuzione spaziale di carica in caso: (a) di assenza di campo elettrico, (b) in presenza di  $\mathbf{E}$ , con corrispondente momento di dipolo elettrico (c).

campo elettrico esercita forze opposte su cariche di segno opposto e induce uno spostamento medio della distribuzione di carica positiva rispetto alla negativa (Fig. 3.3b), cui consegue un momento di dipolo indotto per unità di volume  $\mathbf{P}$  (Fig. 3.3c), che assumiamo parallelo al campo, supposto polarizzato linearmente, dato da  $\mathbf{P} = P\mathbf{p}_0 = q\ell\mathbf{p}_0$ , se  $q$  è la carica nell'unità di volume che si è distanziata della quantità  $\ell$  per effetto del campo. La determinazione di  $P$  richiede quindi la determinazione di  $\ell$ .

Consideriamo un modello dinamico puramente macroscopico del materiale, associando la carica  $q$  a una massa  $m$ , vincolata alla posizione di equilibrio da una

forza di richiamo lineare nello spostamento  $\ell$ . Dato che le cariche messe in moto dal campo cedono statisticamente energia a causa delle collisioni con altre particelle (le velocità individuali sono essenzialmente legate all'energia termica), è presente uno smorzamento ("attrito"), che assumiamo proporzionale alla velocità di spostamento.

Il moto del sistema di cariche si ottiene dall'equilibrio delle forze, assunte parallele ad  $\mathbf{E}$ :

$$F_i + F_s + F_r = q E(t) \quad (3.10)$$

dove

- $F_i = m \frac{d^2 \ell}{dt^2}$  è la forza di inerzia;
- $F_s = s \frac{d\ell}{dt}$  è la forza di smorzamento;
- $F_r = c \ell$  è la forza di richiamo;
- $q E(t) = q E_0 \cos \omega t$  è la forza esercitata dal campo elettrico.

La linearità del mezzo deriva dall'essere  $m$ ,  $s$ ,  $c$  indipendenti da  $\ell$ . Questa condizione è tanto meglio soddisfatta quanto minore è lo spostamento delle cariche dalle loro posizioni di equilibrio, cioè quanto minore è il campo applicato  $E_0$  rispetto ai campi cui sono sottoposte le particelle entro il materiale.

La (3.10) si riduce pertanto all'equazione differenziale

$$m \frac{d^2 \ell}{dt^2} + s \frac{d\ell}{dt} + c \ell = q E_0 \cos \omega t$$

che, con l'uso del formalismo complesso

$$\ell = \text{Re} [\hat{\ell} e^{j\omega t}]; \quad E = \text{Re} [\hat{E} e^{j\omega t}]$$

può essere trasformata in equazione algebrica

$$-\omega^2 \hat{\ell} + j\omega \frac{s}{m} \hat{\ell} + \frac{c}{m} \hat{\ell} = \frac{q}{m} \hat{E} \quad (3.11)$$

Definiti

- il coefficiente di smorzamento  $\alpha = \frac{s}{2m}$
- e la pulsazione di risonanza  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,

la (3.11) diventa

$$(-\omega^2 + 2j\omega\alpha + \omega_0^2) q \hat{\ell} = \frac{q^2}{m} \hat{E}$$

che fornisce il fasore  $\hat{P} = q\hat{\ell}$  del momento di dipolo indotto:

$$\hat{P} = \frac{q^2}{m} \frac{\hat{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega}$$

Il fattore di proporzionalità tra  $\hat{P}$  ed  $\hat{E}$  è complesso, a meno che sia  $\alpha = 0$ .

La (3.9) fornisce la  $\epsilon(\omega)$ :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{\hat{P}}{\epsilon_0 \hat{E}} \right) = \epsilon_0 (\epsilon' + j\epsilon'')$$

che è una quantità in generale complessa. La costante dielettrica relativa è

$$\begin{aligned} \epsilon' + j\epsilon'' &= 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega} \\ &= 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La (3.12) mostra come la dipendenza da  $\omega$  della costante dielettrica relativa dipende dalle caratteristiche fisiche del mezzo descritte dai parametri  $q$ ,  $m$ ,  $\alpha$  e  $\omega_0$ .

Rispetto alla pulsazione di risonanza  $\omega_0$ , si individuano tre campi di frequenza caratteristici.

1. "Basse" ( $\omega \ll \omega_0$ ) frequenze: parte reale e parte immaginaria della  $\epsilon$  sono approssimate dalle

$$\epsilon' \simeq 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}; \quad -\epsilon'' \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^4} \ll \epsilon'$$

dato che nei mezzi comunemente incontrati  $\alpha < \omega_0$ : a basse frequenze  $\epsilon$  è (circa) reale e indipendente da  $\omega$ .

2. "Alte" ( $\omega \gg \omega_0$ ) frequenze:

$$\epsilon' \simeq 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m \omega^2}; \quad -\epsilon'' \simeq \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\alpha}{\omega^3} \ll \epsilon'$$

ad alte frequenze la parte reale di  $\epsilon$  è ancora preponderante rispetto all'immaginaria e ha una debole dipendenza dalla frequenza.

3. Frequenze nell'intorno della risonanza  $\omega \simeq \omega_0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon' + j\epsilon'' &\simeq 1 + \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - 2j\alpha\omega_0}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2} \\ &= 1 + \frac{q^2}{2\epsilon_0 m \omega_0} \left[ \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} - j \frac{\alpha}{(\Delta\omega)^2 + \alpha^2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  indica lo scostamento dalla pulsazione di risonanza. Nell'intorno della risonanza,  $\epsilon'$  ed  $\epsilon''$  possono essere dello stesso ordine di grandezza e variano in maniera caratteristica: la prima ha una rapida diminuzione, preceduta da una sovraelongazione e seguita da una sottoelongazione; la seconda, dalla forma a campana detta "Lorenziana", ha un picco (negativo) in  $\omega_0$  e larghezza (di riga)  $2\alpha$  (Fig. 3.4).

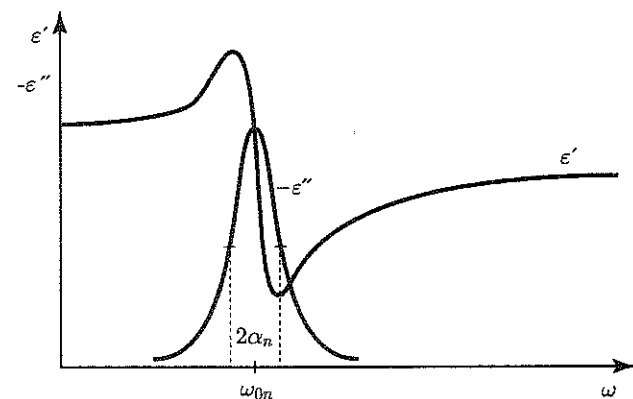


Figura 3.4: Parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) della costante dielettrica relativa in funzione della frequenza. Per  $\omega = \omega_{0n} \pm \alpha$  il modulo della parte immaginaria si riduce alla metà del valore massimo.

Di particolare importanza è il fatto che  $\epsilon''$  è sempre negativa, dal momento che ha segno opposto a quello del coefficiente  $\alpha$  e che  $\alpha > 0$  per la natura della forza di smorzamento.

**3.2.1.0.1 Problema** Un materiale avente carica equivalente per unità di volume  $q = 1.5 \cdot 10^{-3} C$  e massa equivalente per unità di volume  $m = 9.08 \cdot 10^{-15} kg$  si deforma sotto l'azione di un campo elettrico polarizzato linearmente.

Determinare la costante dielettrica complessa e disegnarne l'andamento con la frequenza, sapendo che la costante di smorzamento vale  $s = 0.22 kg \cdot s^{-1}$  e la costante di richiamo vale  $c = 1.29 \cdot 10^9 kg \cdot s^{-2}$ .

### 3.2.1.1 Mezzi compositi: l'atmosfera

Nella trattazione precedente si è considerata la deformazione del sistema di cariche costituenti un materiale sotto l'azione del campo elettrico. Nella realtà i gradi di libertà posseduti da tali sistemi sono più d'uno, per cui esistono diversi "modi" di deformazione, che coinvolgono sia spostamenti degli elettroni rispetto ai nuclei, sia spostamenti tra nuclei (vibrazioni), sia rotazioni. Come esempio importante per le applicazioni, in Fig. 3.5 sono schematizzati i tre possibili modi di vibrazione della

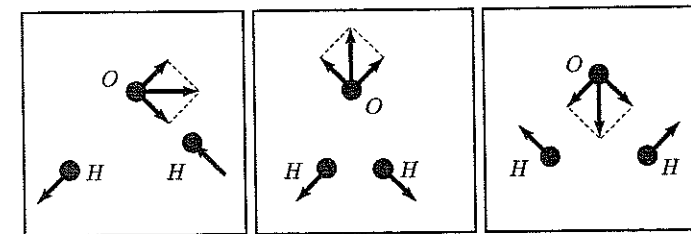


Figura 3.5: I tre modi di deformazione vibrazionale della molecola di acqua.

molecola dell'acqua. Inoltre, raramente in natura si hanno mezzi composti da un solo elemento o da molecole di un solo tipo e, dato che ogni elemento o molecola ha i suoi modi di deformazione, i modi del materiale composto sono dati dall'insieme dei singoli modi. Un esempio di grande importanza nelle applicazioni alle telecomunicazioni e al telerilevamento è quello dell'atmosfera, che è composta prevalentemente da azoto, che è poco polarizzabile, ossigeno e vapor d'acqua. La sua costante dielettrica deriva essenzialmente dalla polarizzazione di queste due ultime molecole, ciascuna delle quali è caratterizzata da diversi modi. Ne risulta un andamento in frequenza dato dalla sovrapposizione degli andamenti relativi alle singole molecole ( $H_2O$  e  $O_2$ ), a loro volta formati dalla sovrapposizione degli  $N_{H_2O}$  e  $N_{O_2}$  singoli modi di polarizzazione:

$$\epsilon'(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S'F'(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S'F'(\omega)]_i + \bar{\epsilon}'$$

$$\epsilon''(\omega) = \sum_{i=1}^{N_{H_2O}} [S''F''(\omega)]_i + \sum_{i=1}^{N_{O_2}} [S''F''(\omega)]_i + \bar{\epsilon}''$$

dove i prodotti  $[SF(\omega)]_i$  rappresentano le (3.13) fattorizzate nel prodotto di un'intensità di riga  $S_i = \frac{q_i^2}{2\epsilon_0 m_i \omega_{0i}}$ , caratteristica della molecola, per le corrispondenti funzioni di forma  $F'(\omega)$  ed  $F''(\omega)$  relative a  $\epsilon'$  e  $\epsilon''$ . I termini  $\bar{\epsilon}'$  e  $\bar{\epsilon}''$  tengono conto di eventuali altri contributi indipendenti dalla frequenza (continuo). Gli andamenti di parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) della costante dielettrica relativa dell'atmosfera sono riportati in Fig. (3.6). In essa si individuano i contributi del vapor d'acqua (righe a  $f_{01}^{H_2O} = 22.2 GHz$  e  $f_{02}^{H_2O} = 183.3 GHz$ ) e dell'ossigeno (banda di righe con massimo a  $f_{01}^{O_2} = 61.2 GHz$  e riga a  $f_{02}^{O_2} = 118.8 GHz$ ). Le lorenziane sono sovrapposte a un piedistallo con andamento crescente con la frequenza, dovuto alle numerose e intense righe che l' $H_2O$  presenta a frequenze più alte.

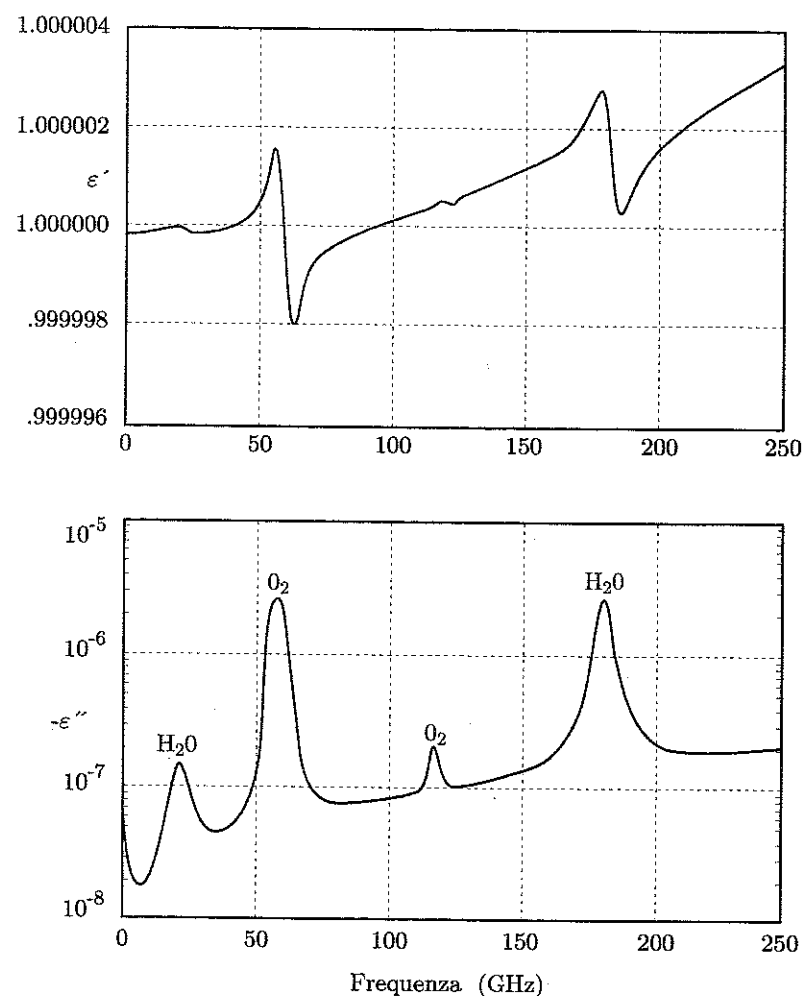


Figura 3.6: Parte reale e parte immaginaria della costante dielettrica dell'atmosfera nell'intervallo di frequenza 0-250 GHz. L'atmosfera è supposta alla pressione  $P = 1013$  hPa, temperatura  $T = 20^\circ$  C e umidità relativa  $RH = 70\%$ .

### 3.2.2 Mezzi polari

In alcuni casi, quale, importantissimo, quello dell'acqua liquida (Fig. 3.7), le cariche che costituiscono il materiale sono organizzate in dipoli elettrici permanenti.

In generale, in assenza di campo, i dipoli sono orientati casualmente; l'applicazione di un campo elettrico tende a orientare i dipoli nel suo verso, producendo così un momento di dipolo indotto. Questa polarizzazione per orientamento si sovrappone a quella per deformazione vista nel paragrafo 3.2.1 e può raggiungere valori elevati.

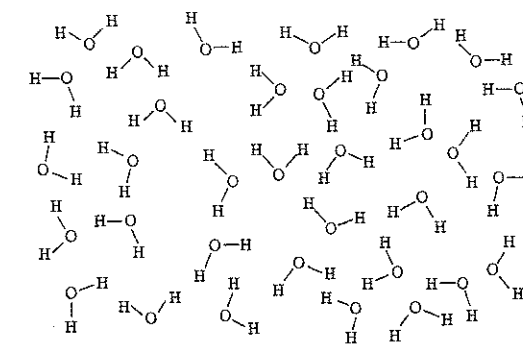


Figura 3.7: L'acqua liquida tende a organizzarsi in domini microscopici dotati di momento di dipolo.

Tuttavia, dato che la rotazione dei dipoli indotta dal campo è contrastata dalle loro mutue interazioni, l'intensità di queste ultime ne limita il contributo a frequenze relativamente basse.

Per calcolare la costante dielettrica di un materiale polare, leghiamo il vettore di polarizzazione al campo elettrico nel dominio della frequenza, secondo la (3.9). Facciamo riferimento al momento di dipolo  $\mathbf{P}$  per unità di volume, risultante dei momenti di dipolo microscopici nel materiale. Per quanto detto, il vettore di polarizzazione è dato dalla somma di un componente  $\mathbf{P}_d$  che tiene conto della deformazione del sistema di cariche per l'azione del campo elettrico applicato e di uno  $\mathbf{P}_o$  che tiene conto dell'orientamento dei dipoli:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_d(t) + \mathbf{P}_o(t)$$

Alle frequenze alle quali risulta apprezzabile la rotazione dei dipoli, le forze d'inerzia risultano trascurabili rispetto alle altre, per cui, proiettati sulla normale al piano di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$  i momenti delle forze agenti collettivamente sul dipolo, il loro equilibrio dà

$$M(E) = M_s + M_c$$

dove

- $M(E) = a E(t)$  è il momento della forza esercitata dal campo elettrico, assunto lineare in  $E$  (ciò comporta che le frequenze considerate siano anche sufficientemente elevate perché i dipoli del materiale, frenati dalla "viscosità", ruotino di angoli piccoli);
- $M_s = s \frac{dP_o}{dt}$  è il momento della forza di smorzamento ("viscosità") che si oppone all'orientazione dei dipoli, sottraendo loro energia durante la rotazione;
- $M_c = c P_o$  è il momento della forza di collisione, che, per effetto dell'agitazione termica, tende a disordinare l'orientazione dei dipoli,

sicché  $P_o$  è soluzione della

$$s \frac{dP_o}{dt} + cP_o = aE(t) \quad (3.14)$$

che l'uso del formalismo complesso trasforma nella

$$j\omega s \hat{P}_o + c\hat{P}_o = a\hat{E}$$

Il legame tra  $\hat{P}_o$  ed  $\hat{E}$  è

$$\hat{P}_o = \frac{a\hat{E}}{c + j\omega s}$$

e quindi la costante dielettrica relativa complessiva (somma dei contributi di deformazione e orientamento) del materiale vale

$$\epsilon'(\omega) + j\epsilon''(\omega) = \epsilon'_d(\omega) + j\epsilon''_d(\omega) + \frac{\frac{a}{c}}{\epsilon_0 \left(1 + j\omega \frac{s}{c}\right)} = \epsilon'_d(\omega) + j\epsilon''_d(\omega) + \frac{A}{1 + j\omega\tau} \quad (3.15)$$

con  $A = \frac{a}{\epsilon_0 c}$ .

Nella (3.15)  $\tau = \frac{s}{c}$  è il tempo di rilassamento del materiale: infatti, la (3.14) indica che, se si annulla il campo elettrico, il momento di dipolo per orientazione decade secondo la

$$P_o(t) = P_o(0)e^{-t/\tau}$$

La costante  $A$  nella (3.15) viene usualmente espressa tramite il valore statico della costante dielettrica relativa:  $A = \epsilon'(0) - \epsilon'_d(0) = \epsilon^0$ .

In definitiva, la costante dielettrica relativa di un materiale polare è

$$\begin{aligned} \epsilon' + j\epsilon'' &= \epsilon'_d + j\epsilon''_d + \frac{\epsilon^0}{1 + j\omega\tau} = \\ \epsilon'_d + j\epsilon''_d + \frac{\epsilon^0}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{\epsilon^0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Anche in questo caso la parte immaginaria della costante dielettrica è sempre negativa.

Nella pratica, per i materiali polari condensati più significativi, quale l'acqua liquida, nell'intervallo di frequenze nel quale il contributo dell'orientamento dei dipoli è apprezzabile, la costante dielettrica dovuta alla deformazione si può spesso considerare costante (approssimazione di "basse" frequenze), sicché l'andamento della costante dielettrica con la frequenza è determinato essenzialmente dal termine di orientamento. Gli andamenti (3.16) di  $\epsilon'$  e  $-\epsilon''$  con la frequenza sono schematizzati in Fig. 3.8. Il modulo della parte immaginaria presenta un massimo per  $\omega = \frac{1}{\tau}$ , pulsazione intorno alla quale la parte reale decresce rapidamente.

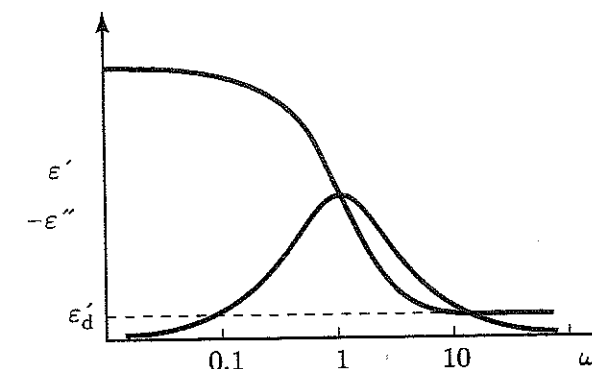


Figura 3.8: Parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) della costante dielettrica relativa di un mezzo polare in funzione di  $\omega\tau$ . Il contributo della deformazione alla costante dielettrica è assunto costante ("basse" frequenze).

Come nel caso dei modi di deformazione dei materiali non polari, una sostanza può presentare più di un tempo di rilassamento; inoltre il comportamento dielettrico di materiali compositi deriva dalla sovrapposizione degli effetti dei diversi costituenti.

Come detto, il materiale polare più comune e più importante è l'acqua liquida, che possiede più di un tempo di rilassamento, funzione della temperatura. Nel campo delle radiofrequenze, fino alle onde millimetriche, la costante dielettrica è determinata da un rilassamento principale intorno a 20 GHz e da uno secondario intorno ai 600 GHz (modello a doppio rilassamento di Debye). La Fig. 3.9 mostra gli andamenti di  $\epsilon'$  e di  $-\epsilon''$  dell'acqua liquida tra 0 e 100 GHz.

### 3.2.3 Mezzi conduttori

La presenza di elettroni nello spazio libero o nella banda di conduzione di un materiale rende il mezzo conduttore. In questo caso le cariche non sono vincolate nell'intorno di una posizione, ma sono libere di spostarsi sotto l'azione di un campo elettrico applicato.

La costante dielettrica si determina a partire dall'equilibrio delle forze,

$$m \frac{d^2 \ell}{dt^2} + s \frac{d\ell}{dt} = q E_0 \cos \omega t \quad (3.17)$$

in cui non compare la forza di richiamo. Con l'uso del consueto formalismo complesso, la (3.17) può essere trasformata in equazione algebrica

$$-\omega^2 \hat{\ell} + j\omega \frac{s}{m} \hat{\ell} = \frac{q}{m} \hat{E}$$

ovvero

$$(-\omega^2 + 2j\omega\alpha) q \hat{\ell} = \frac{q^2}{m} \hat{E}$$

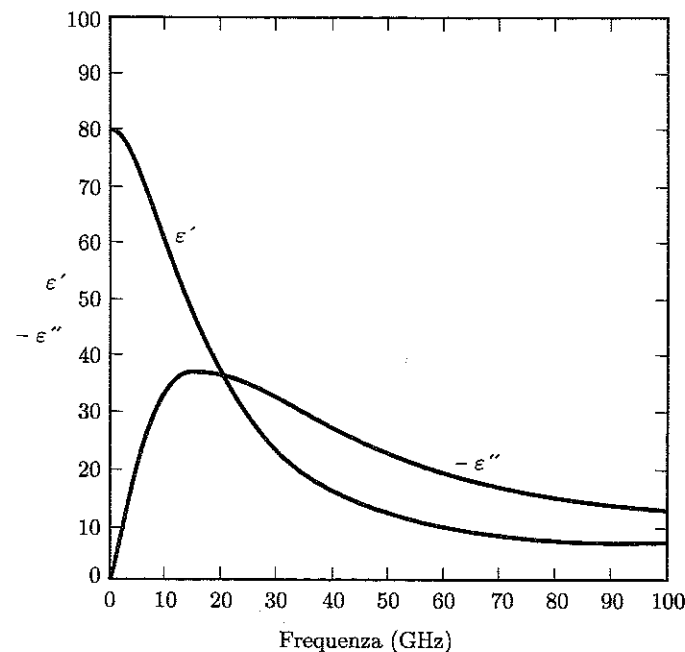


Figura 3.9: Parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) della costante dielettrica relativa dell'acqua liquida in funzione della frequenza (scale lineari), alla temperatura  $T = 20^\circ \text{C}$ . La temperatura modifica sensibilmente i tempi di rilassamento.

avendo definito il coefficiente di smorzamento  $\alpha = \frac{s}{2m}$ . La sua soluzione fornisce il momento di dipolo  $q\hat{\ell}$  in funzione di  $\hat{E}$  e quindi la costante dielettrica relativa nel dominio della frequenza, data da

$$\epsilon' + j\epsilon'' = 1 - \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} - j \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{2\alpha}{\omega(\omega^2 + 4\alpha^2)} \quad (3.18)$$

Si nota che anche in questo caso  $\epsilon'' < 0$ . Inoltre, sia la parte reale sia quella immaginaria hanno un andamento decrescente monotono in  $\omega$ , con  $\epsilon''$  che diverge quando  $\omega \rightarrow 0$ . Questo è dovuto al fatto che non è stata imposta alcuna limitazione, tramite l'equazione di continuità, alla disponibilità di carica, che, accumulandosi indefinitamente, fa divergere il momento di dipolo indotto.

### 3.3 La conducibilità nel dominio della frequenza

Se nella (3.17) consideriamo incognita la velocità  $u = \frac{d\ell}{dt}$  della carica per unità di volume, anziché il suo spostamento,

$$m \frac{du}{dt} + su = qE_0 \cos \omega t$$

Moltiplicata per  $q$  essa dà

$$mq \frac{du}{dt} + squ = q^2 E_0 \cos \omega t$$

che fornisce la densità di corrente  $J = qu$  in funzione del campo  $E$ .

Nel dominio della frequenza

$$j\omega m \hat{J} + 2\alpha m \hat{J} = q^2 \hat{E}$$

e quindi

$$\hat{J} = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} \hat{E} \quad (3.19)$$

La (3.19) permette di determinare la conducibilità complessa nel dominio della frequenza

$$g(\omega) = \frac{q^2}{m(2\alpha + j\omega)} = \frac{q^2}{m} \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{q^2}{m} \frac{\omega}{4\alpha^2 + \omega^2} \quad (3.20)$$

A "bassa" frequenza, ovvero per  $\omega \ll \alpha$ ,

$$g(\omega) \simeq \frac{q^2}{m} \frac{1}{2\alpha} - j \frac{q^2}{m} \frac{\omega}{4\alpha^2}$$

ed è quindi  $|\text{Im}[g]| \ll \text{Re}[g]$ . Nella pratica, per i materiali conduttori più comuni, le radiofrequenze possono essere considerate "basse" e la conducibilità reale.

#### 3.3.1 Conducibilità e costante dielettrica

Dal confronto tra la (3.18) e la (3.20) è interessante notare che

$$\epsilon'' = -\frac{\text{Re}[g]}{\omega \epsilon_0} \quad (3.21)$$

Ciò indica che parte immaginaria della costante dielettrica e parte reale della conducibilità descrivono lo stesso processo di dissipazione dell'energia elettromagnetica in un mezzo conduttore. Tramite la (3.21) è possibile esprimere la parte immaginaria della costante dielettrica in funzione della conducibilità e, reciprocamente, esprimere la parte reale della conducibilità in funzione della  $\epsilon''$ .

D'altra parte, una quantità *equivalente*  $\mathcal{R}e[g_e]$  può essere introdotta mediante la (3.21) anche per mezzi non conduttori (polari o non polari con cariche vincolate). Dato che in questi casi i meccanismi di dissipazione descritti dalla  $\epsilon''$  sono diversi, la dipendenza della  $\mathcal{R}e[g_e]$  da  $\omega$  è diversa da quella espressa dalla (3.20).

Nel caso di mezzo condensato e radiofrequenze,

$$\epsilon'' \simeq -\frac{g}{\omega\epsilon_0}$$

Questo legame viene spesso sfruttato per definire la *conducibilità equivalente* del mezzo:

$$g_e = -\omega\epsilon_0\epsilon''$$

**3.3.1.0.1 Problema** Un materiale ha  $N = 10^{23}$  elettroni a  $m^3$  disponibili per la conduzione e una costante di smorzamento  $s = 25.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}$ .

1. Determinare la conducibilità del materiale alla frequenza  $f = 159 \text{ kHz}$ , ricordando che la massa dell'elettrone è  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  e la sua carica  $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .
2. Determinare la parte immaginaria della costante dielettrica relativa.
3. Verificare numericamente le relazioni tra conducibilità e costante dielettrica.

### 3.3.2 Dielettrici acquosi

Come già visto nel paragrafo 3.2.2, nei materiali reali è in generale presente più di un meccanismo di polarizzazione, anche se nei diversi campi di frequenza uno di essi può prevalere sugli altri. In tali casi, la costante dielettrica complessa del materiale deriva dal momento di dipolo totale indotto dal campo, che si ottiene sommando i contributi dei diversi meccanismi. Ad esempio, l'acqua con sali disciolti è un mezzo polare con cariche libere. La sua costante dielettrica, tenuto conto delle (3.16) e (3.18), ha parti reale e immaginaria

$$\epsilon' = \epsilon'_d + \frac{\epsilon^0}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{q_c^2}{\epsilon_0 m_c} \frac{1}{\omega^2 + 4\alpha^2} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \epsilon'' &= \epsilon''_d - \frac{\omega\tau\epsilon^0}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{q_c^2}{\epsilon_0 m_c} \frac{2\alpha}{\omega(\omega^2 + 4\alpha^2)} \\ &= \epsilon''_d - \frac{\omega\tau\epsilon^0}{1 + \omega^2\tau^2} - \frac{\mathcal{R}e[g]}{\omega\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove il pedice  $c$  denota le quantità relative alle cariche libere.

Un esempio importante di mezzo polare conduttore è l'acqua del mare, di cui in Fig. 3.10 vengono riportate le parti reale e immaginaria della costante dielettrica relativa, assieme a quelle dell'acqua pura. Si nota che la parte reale dipende poco dai sali disciolti, mentre la parte immaginaria ne è fortemente influenzata alle frequenze più basse.

Altri esempi importanti di dielettrici acquosi sono i tessuti viventi (animali, piante). In particolare, il corpo umano contiene acqua in misura preponderante; le

proprietà dielettriche dei tessuti sono quindi notevolmente influenzate da quelle dell'acqua liquida, anche se la presenza di diverse altre sostanze, quali i sali in soluzione, e di particolari strutture, quali, soprattutto, le membrane cellulari, introducono apprezzabili scostamenti. La Fig. 3.11 riporta  $\epsilon'$  e  $-\epsilon''$  di un campione di tessuto muscolare in funzione della frequenza. Nell'intorno della frequenza di rilassamento gli andamenti sono essenzialmente quelli dell'acqua liquida, mentre nella parte bassa delle frequenze si nota il considerevole aumento di  $|\epsilon''|$  dovuto alla conducibilità ionica. Per frequenze molto basse, fuori dall'intervallo in figura, anche la  $\epsilon'$  aumenta considerevolmente per effetto della polarizzazione delle membrane cellulari.

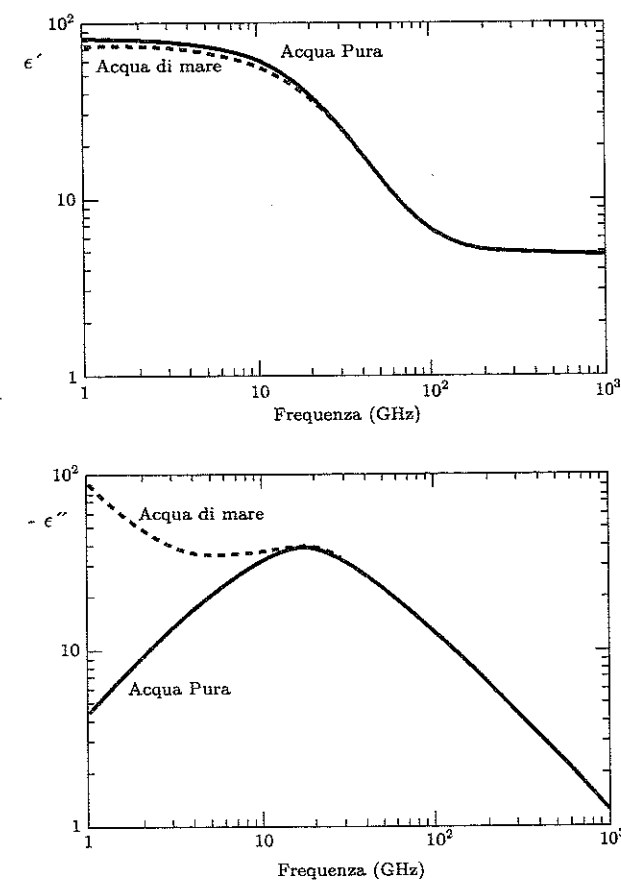


Figura 3.10: Parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) della costante dielettrica relativa di acqua di mare e acqua pura in funzione della frequenza (scale logaritmiche), alla temperatura  $T = 20^\circ \text{ C}$ . La salinità marina è del  $32.5 \text{ ‰}$  (kg/kg).

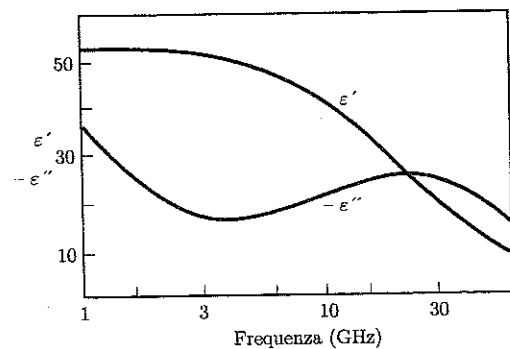


Figura 3.11: Parte reale e parte immaginaria (cambiata di segno) di tessuto muscolare in funzione della frequenza.

In definitiva, per quanto visto nel paragrafo 3.3.1, i materiali con diversi meccanismi di polarizzazione, quali i dielettrici acquosi, possono essere caratterizzati elettromagneticamente tramite

- costante dielettrica complessa globale (3.22) e (3.23);
- costante dielettrica complessa relativa alla polarizzazione (per deformazione e/o orientamento) e conducibilità;
- parte reale della costante dielettrica globale e conducibilità equivalente.

**3.3.2.0.2 Problema** I sali ( $\text{NaCl}$ , prevalentemente) nell'acqua marina rendono disponibile alla conduzione una carica per unità di volume  $q = 1.28 \cdot 10^7 \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ , cui corrisponde una massa  $m = 4.08 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Calcolare

1. la conducibilità dell'acqua marina
2. la costante dielettrica;
3. la conducibilità equivalente

alla frequenza  $f_0 = 15 \text{ GHz}$ , sapendo che il coefficiente di smorzamento è  $\alpha = 5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$  e assumendo  $T = 20^\circ \text{ C}$ .

### 3.3.2.1 La ionosfera

Nella parte medio-alta dell'atmosfera sono presenti cariche libere per effetto dell'azione ionizzante della radiazione solare. Dato che la mobilità degli elettroni liberi è molto più alta di quella degli ioni, le proprietà della ionosfera sono descritte in termini di densità di elettroni (Fig. 3.12). Se  $q_e$  ed  $m_e$  sono carica e massa dell'elettrone, rispettivamente, per l'unità di volume  $q = -Nq_e$ ,  $\mathbf{J} = -Nq_e \mathbf{u}$ ,  $m = Nm_e$  e la (3.19) diventa

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{Nq_e^2}{m_e(2\alpha + j\omega)} \hat{\mathbf{E}}$$

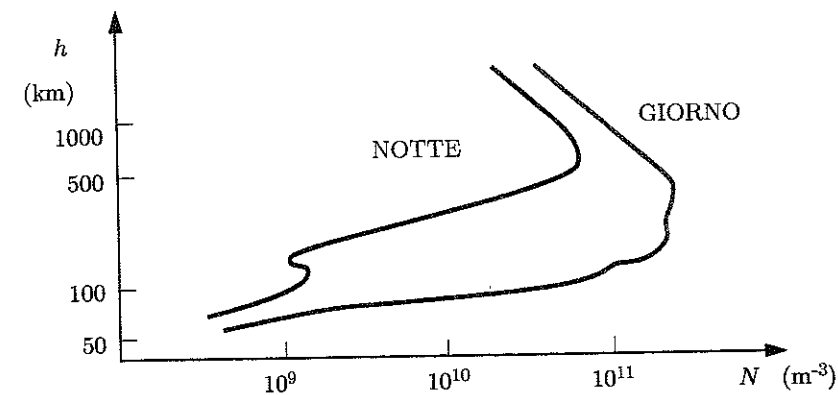


Figura 3.12: Densità di elettroni nella ionosfera in presenza e assenza di radiazione solare.

A frequenze  $f \ll \alpha$ , la conducibilità è

$$g \simeq \frac{Nq_e^2}{2\alpha m_e}$$

Dato che il coefficiente di smorzamento nella ionosfera è  $\alpha \sim 0.5 \text{ kHz}$ , a frequenze estremamente basse (ELF) la ionosfera si comporta come uno strato conduttore che avvolge la terra, posizionato intorno alla quota di massima ionizzazione ( $h \simeq 100 \div 500 \text{ km}$ ), che riflette verso il basso le onde ELF provenienti dalla superficie terrestre. Per alte frequenze (HF,  $f \gg \alpha$ ), la (3.18) dà

$$\epsilon' \simeq 1 - \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

dove

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

è la frequenza di plasma, dipendente da  $N$  e quindi dalla quota. Per frequenze  $\omega > \omega_p$  la ionosfera si comporta come uno strato dielettrico disomogeneo con minimo di  $\epsilon'$  alla quota di massima ionizzazione, che rifrange verso il basso le onde HF provenienti dalla superficie terrestre.

**3.3.2.1.1 Problema** In una zona della ionosfera la densità di elettroni è  $N = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$ .

Calcolare costante dielettrica e conducibilità complesse alla frequenza  $f = 10 \text{ MHz}$ , ricordando che la massa dell'elettrone è  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  e la sua carica  $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .