



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

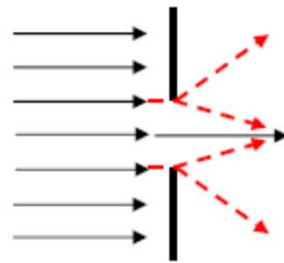


Teoria della diffrazione

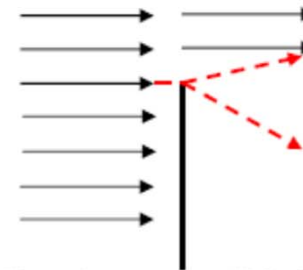
Introduzione

- Con il termine *diffrazione* si intende indicare una particolare categoria di fenomeni propagativi generati dalla presenza di ostacoli sul cammino di propagazione.

Esempi:



Diffrazione da Apertura

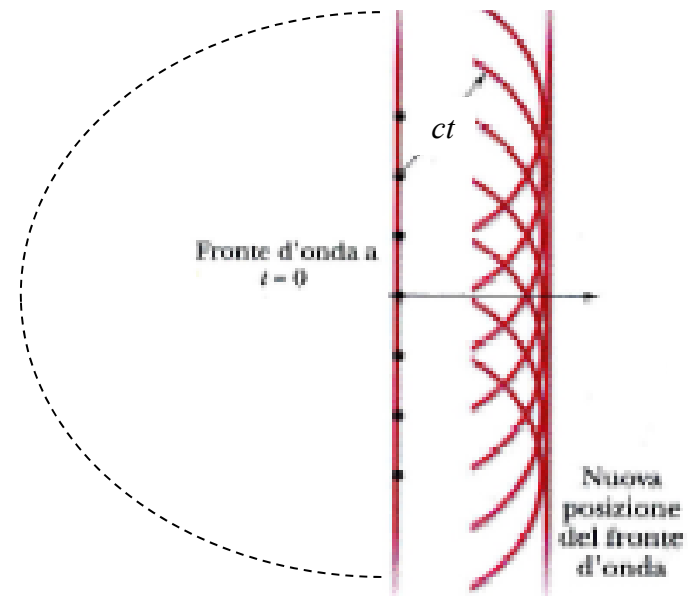


Diffrazione da "Knife Edge"

- La diffrazione determina in particolare:
 - Campo non nullo anche in zone non direttamente illuminate dalla sorgente.
 - Campo diverso da quello di spazio libero nelle zone direttamente illuminate dalla sorgente
- La diffrazione è tanto più rilevante quanto più le dimensioni geometriche in gioco (ostacoli, aperture, raggi di curvatura) sono piccole rispetto a λ . L'Ottica Geometrica dà risultati sufficientemente accurati ogni volta che le dimensioni degli oggetti investiti da un'onda EM è $\gg \lambda$.

Principio di Huygens-Fresnel

- E' la più antica teoria approssimata che spiega i **fenomeni di diffrazione** (precedente alla Teoria elettromagnetica).
- Dato un fronte d'onda ad un istante $t = 0$, il fronte ad un istante successivo (t) si trova assumendo che ogni punto del fronte a $t = 0$ sia sorgente d'onde sferiche che si propagano con la velocità caratteristica del mezzo.
- L'applicazione del principio di Huygens-Fresnel fornirebbe anche un fronte d'onda che si propaga in verso opposto a quello dell'onda originaria. Quest'ultimo va scartato (privo di significato fisico).
- Il campo e.m. in un punto è determinabile a partire dalla conoscenza di quello tangenziale assegnato su una superficie.
- La formulazione elettromagnetica del principio è espressa, considerando superfici chiuse (eventualmente fittizie), dal **teorema di equivalenza**.

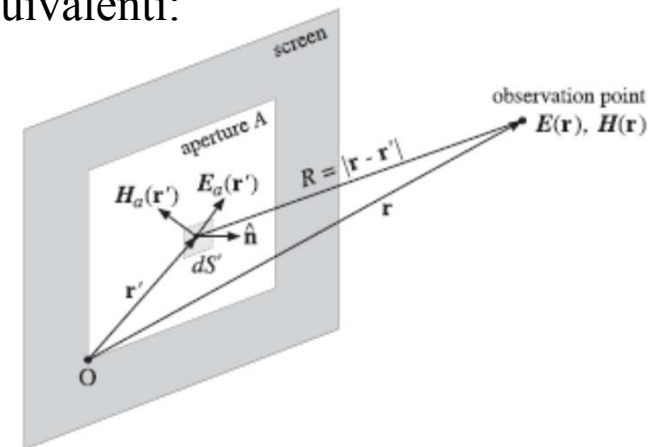


Teorema di equivalenza

- Siano $\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a$ i campi tangenziali su un'apertura A, (figura). Tali campi si assumono noti e sono generati dalle sorgenti a sinistra del piano. Il campo a grande distanza può determinarsi con l'applicazione del teorema di equivalenza che afferma che i campi sull'apertura possono essere sostituiti da correnti elettriche \mathbf{k} [A/m] e magnetiche \mathbf{k}_m [V/m] equivalenti:

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_a$$

$$\mathbf{k}_m = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a$$



- Ci sono due formule alternative per il teorema di equivalenza:

$$\mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{k}_m = -2(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \quad \text{Schermo CEP}$$

$$\mathbf{k} = 2(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a)$$

$$\mathbf{k}_m = 0 \quad \text{Schermo CMP}$$

Per il teo. delle immagini, il CEP (CMP) può essere eliminato e sostituito da una corrente superficiale magnetica (elettrica) che raddoppia il proprio valore. Il campo immagine causa l'annullarsi del campo magnetico tangenziale totale sullo schermo.

Sorgenti di Huygens

- I campi sull'apertura $\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a$ sono detti sorgenti di Huygens se in tutti i punti dell'apertura soddisfano la relazione delle onde piane uniformi:

$$\mathbf{H}_a = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) / \eta$$

Questo è il caso di un'onda piana uniforme che incide da sinistra sul pino dell'apertura (figura). I campi sull'apertura sono assunti uguali ai campi incidenti.

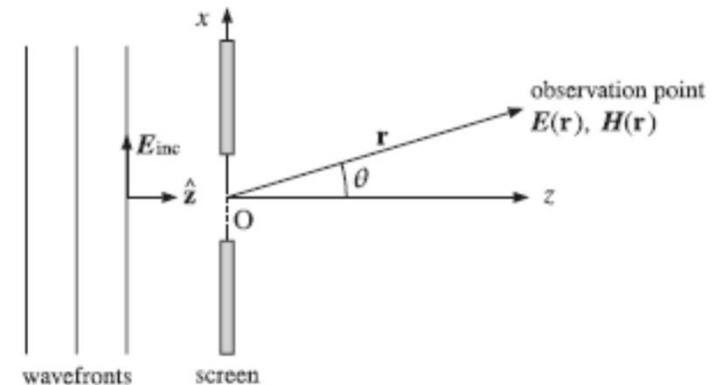
- A grande distanza dall'apertura (zona di Fraunhofer) il campo e.m. è espresso in funzione della trasformata di Fourier monodimensionale dei campi sull'apertura:

$$E_\theta = jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{2} [f_x \cos \phi + f_y \sin \phi]$$

$$E_\phi = jk \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{2} [f_y \cos \phi - f_x \sin \phi]$$

con:

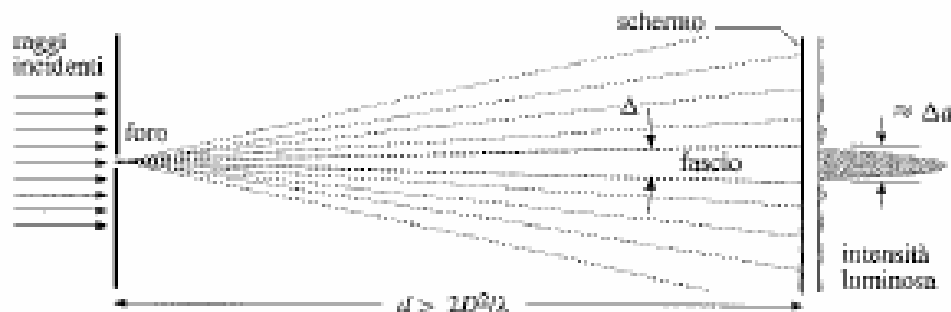
$$f(\theta, \phi) = \int_A \mathbf{E}_a(x', y') e^{jk \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}_0} dx' dy' = \int_A \mathbf{E}_a(x', y') e^{j(k_x x' + k_y y')} dx' dy'$$



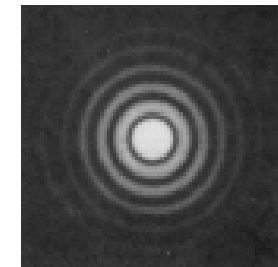
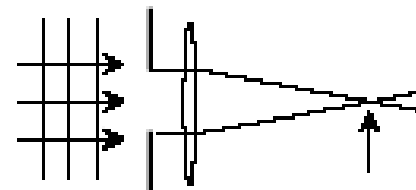
$\frac{1 + \cos \theta}{2}$ è detto fattore di obliquità

Diffrazione di Fraunhofer

- Per determinare il campo a grande distanza da un'apertura abbiamo affrontato un problema di diffrazione da ostacolo in cui le distanze sorgente-ostacolo e ostacolo-punto di osservazione erano talmente grandi da poter considerare onde piane uniformi. Questo è il caso della *diffrazione di Fraunhofer*.
- E' noto che, in zona di radiazione, un'apertura rettangolare irradia un'onda la cui energia è prevalentemente confinata entro un fascio concentrato intorno alla direzione normale all'apertura. Il fascio è tanto più stretto quanto maggiore è il rapporto tra le dimensioni dell'apertura e λ . Il diagramma di radiazione presenta un certo numero di lobi laterali.
- Le modalità di radiazione delle aperture spiegano il fenomeno di diffrazione che si osserva quando si proietta su uno schermo un fascio luminoso di raggi paralleli trasmesso attraverso un foro. Se lo schermo è posto in zona di Fraunhofer (ossia a distanza maggiore della distanza di Fresnel $2D^2/\lambda$) si osserva un'immagine luminosa molto diversa dalla semplice proiezione del foro, in contrasto con l'OG.

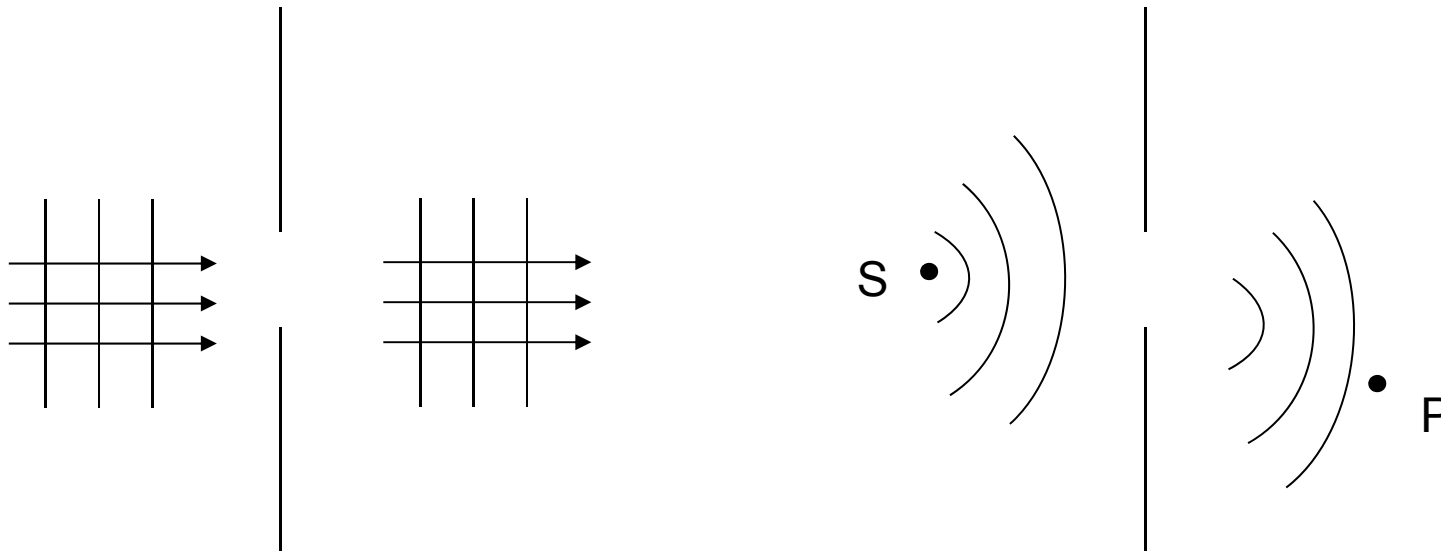


Fraunhofer diffraction - Airyn pattern



Teoria della diffrazione

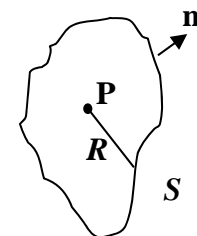
- Se almeno uno tra sorgente e punto di osservazione è sufficientemente vicino all'ostacolo per rendere non applicabile l'approssimazione di onda piana (curvatura del fronte d'onda non trascurabile) è necessario utilizzare la teoria della diffrazione di Fresnel.
- In pratica, mentre nella diffrazione di Fraunhofer abbiamo considerato solo variazioni lineari di fase sull'apertura nella trattazione che segue considereremo tutto il fattore di fase sferica.



Teorema integrale di Kirchoff (1/2)

- Si abbia un volume V racchiuso da una superficie chiusa S . *Supponiamo il campo su S noto* e vogliamo determinare il campo in un punto P interno ad S . Consideriamo 2 funzioni arbitrarie $U(\mathbf{r})$ e $V(\mathbf{r})$ che soddisfano l'eq. delle onde scalare omogenea. Per il teorema di Green scalare si ha:

$$\oint_S (G \nabla U - U \nabla G) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dV$$



Essendo per l'eq. delle onde: $\nabla^2 G = -k^2 G$; $\nabla^2 U = -k^2 U$,

ed essendo inoltre $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS \Rightarrow \nabla U \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial U}{\partial n} dS$, si ha:

$$\oint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \int_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dV = 0$$

Poniamo ora: $G = \frac{e^{-jk_0 R}}{R}$ dove R denota la posizione del punto P

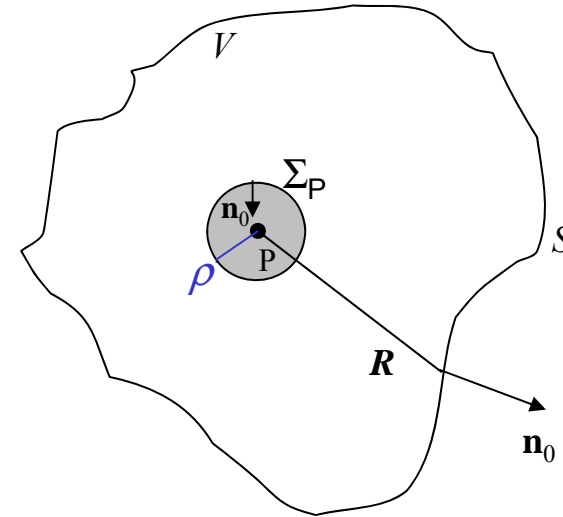
rispetto al generico punto di S

Teorema integrale di Kirchoff (2/2)

Tracciamo una piccola sfera Σ_P di raggio ρ , intorno a P. Quindi escludiamo il volumetto racchiuso da Σ_P dall'integrale e facciamo il limite per $\rho \rightarrow 0$. Si ha:

$$\int_S \left\{ \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \right\} dS -$$

$$- \int_{\Sigma_P} \left\{ \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right) - U \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \right\} \rho^2 d\Omega = 0$$

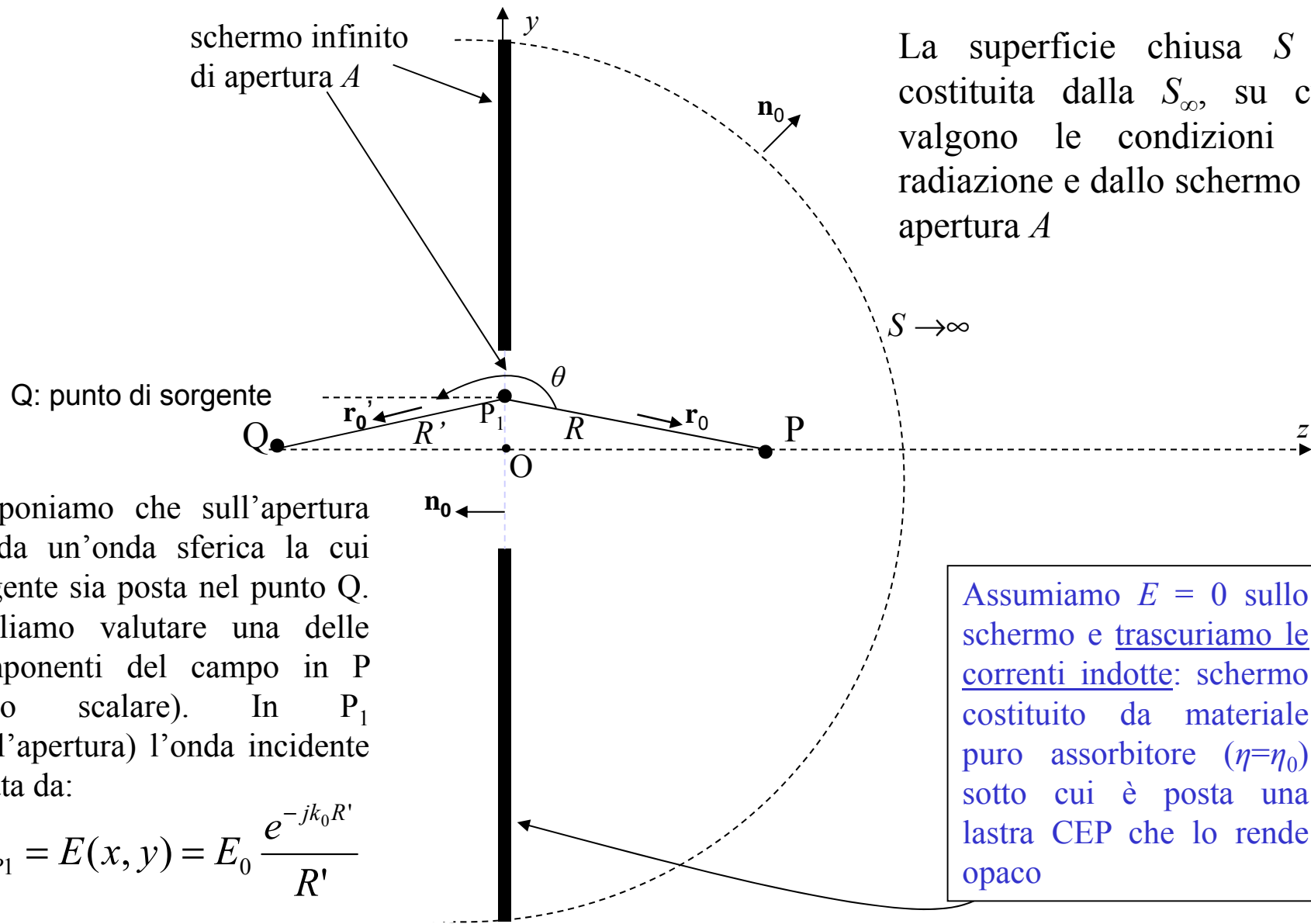


Poniamo ora $U = E$ (ampiezza campo elettrico su S). Poichè si dimostra che per $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \oint_{\Sigma_P} \dots \rightarrow 4\pi E_P$ (campo elettrico in P),

ricaviamo il teorema integrale di Kirchoff che fornisce il campo in un punto P in funzione del valore del campo su una superficie chiusa S che racchiude P:

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \right\} dS = \oint_S \left\{ G \frac{\partial E}{\partial n} - E \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS$$

Applicazione alla diffrazione da fenditura (1/2)



Applicazione alla diffrazione da fenditura (2/2)

$$E_P = \frac{E_0}{4\pi} \int_A \left\{ \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R'}}{R'} \right) - \frac{e^{-jk_0 R'}}{R'} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \right\} dS$$

Il campo sulla superficie chiusa S è $=0$ tranne che in A

Poiché: $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) = (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-jk_0 R}}{R} \right) \approx (\text{grande distanza: } R \gg \lambda)$

$\approx -jk_0 \frac{e^{-jk_0 R}}{R} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0)$, ragionando allo stesso modo per $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk_0 R'}}{R'} \right)$, si ricava:

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{4\pi} \int_A \frac{e^{-jk_0(R+R')}}{RR'} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0) dS =$$

$-2F(\theta)$

$$= jk_0 \frac{E_0}{2\pi} \int_A \frac{e^{-jk_0(R+R')}}{RR'} F(\theta) dS \quad \text{Formula di diffrazione di Fresnel-Kirchoff}$$

θ denota l'angolo tra \mathbf{n}_0 e \mathbf{r}_0 e $F(\theta)$ è il fattore di obliquità

Generalmente $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0' \cong 1 \Rightarrow F(\theta) = (1/2)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0 - 1) = (1/2)(\cos \theta - 1)$:

In condizioni parassiali $\cos \theta \cong -1 \Rightarrow F(\theta) = -1$ e si ottiene:

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{2\pi} \int_A \frac{e^{-jk_0(R+R')}}{RR'} dS = -j \frac{E_0}{\lambda} \int_A \frac{e^{-jk_0(R+R')}}{RR'} dS = -\frac{j}{\lambda} \int_A E_{P1} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dS$$

Interpretazione fisica della formula di Fresnel-Kirchoff

- Il campo (onda sferica) nel punto P_1 sull'apertura dovuto alla sorgente in Q é:

$$E_{P_1} = E_0 \frac{e^{-jk_0 R'}}{R'}$$

- Supponiamo che ciascun elemento dA dell'apertura dia a sua volta luogo ad un'ondina sferica di ampiezza $dE = E_{P_1} dA$

- Nel punto P si ha: $dE_P = E_{P_1} dA \frac{e^{-jk_0 R}}{R}$

- Il campo totale in P è proporzionale alla somma integrale di tutte le ondine pesata per il fattore di obliquità $F(\theta)$ che, in molte applicazioni, è approssimabile ad 1:

$$E_P \propto \int dE_P F(\theta)$$

- La formula di Fresnel-Kirchoff rappresenta l'equazione di base della teoria della diffrazione e quindi, essenzialmente, la formulazione matematica del principio di Huygens-Fresnel

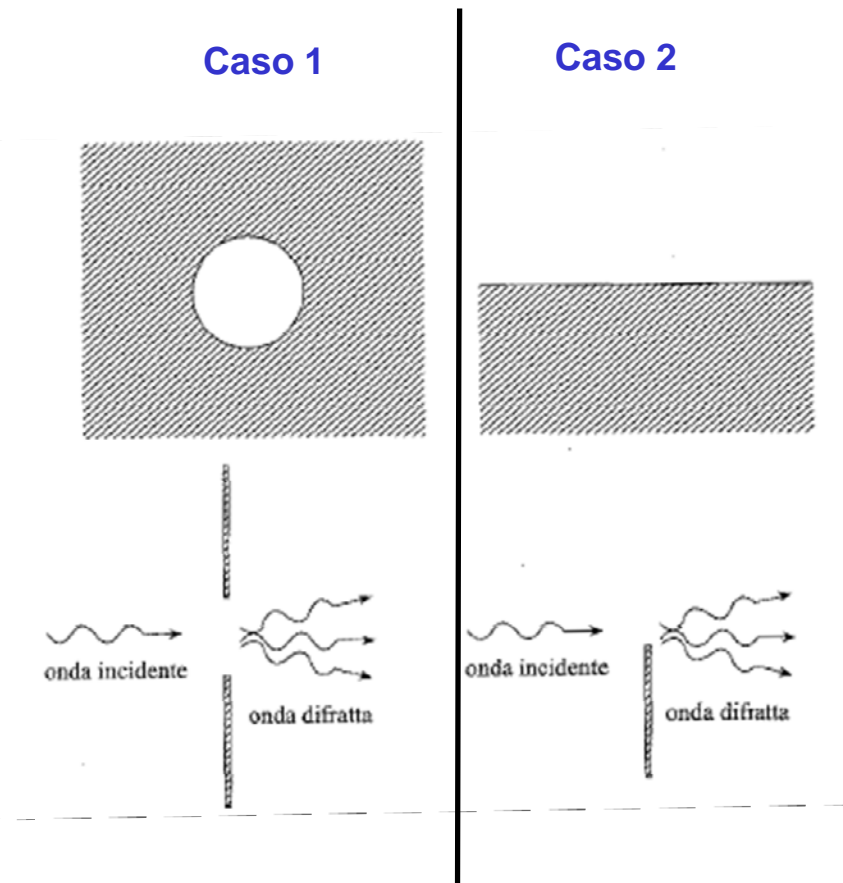
Diffrazione da ostacoli

Considereremo ostacoli costituiti da materiale puro assorbitore (coiè caratterizzato da un'impedenza caratteristica pari a quella del vuoto: $\eta = \eta_0 = 377 \Omega$), ma anche totalmente opaco.

Tale semplificazione non altera i risultati visto che, ove si consideri lo schermo un conduttore (e quindi presenza di correnti indotte che irradiano), ci si può ricondurre ad una situazione in cui la radiazione a grande distanza è determinata dalle sorgenti equivalenti (di Huygens) sull'apertura (teo. Equivalenza + teo. Immagini).

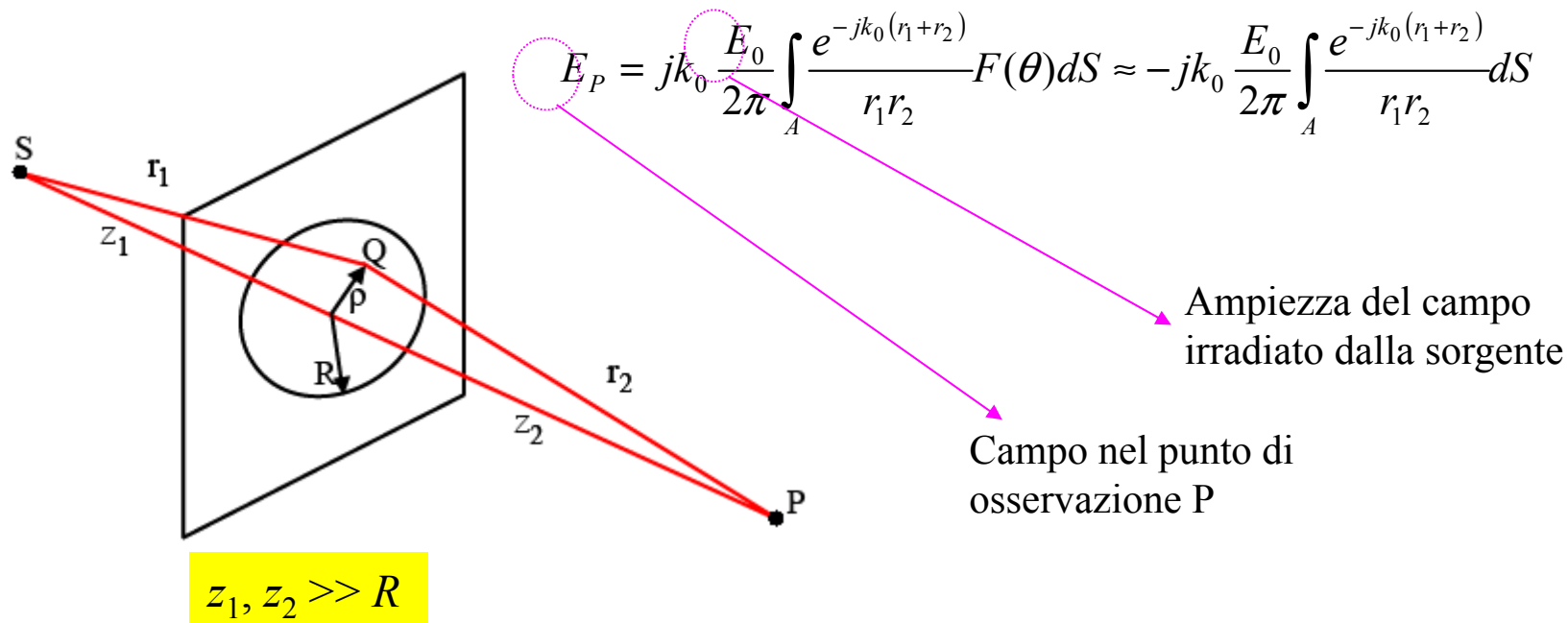
Considereremo 2 casi particolari:

1. *Diffrazione da apertura circolare*, che ci permetterà di applicare il concetto di ellissoide di Fresnel.
2. *Diffrazione da semipiano indefinito*, usata per tener conto della presenza di edifici, montagne o colline frapposti alla libera propagazione.



Diffrazione da apertura circolare

- Consideriamo uno schermo piano indefinito nel quale è praticata un'apertura circolare di dimensioni grandi rispetto a λ . Supponiamo che un'onda venga fatta incidere perpendicolarmente sull'apertura e che le distanze sorgente-apertura-osservatore siano finite
- Per valutare il campo nel semispazio di destra (vedi figura) in cui si trova l'osservatore P, dobbiamo applicare la formula di Fresnel-Kirchoff che in questo caso possiamo scrivere come:



Per il denominatore dell'integrando possiamo operare la seguente approssimazione (conseguente ad aver ipotizzato $R \ll z_1$ e $R \ll z_2$):

$$1/r_1 r_2 \approx 1/z_1 z_2.$$

Inoltre è conveniente passare in coordinate polari per le quali $dS = \rho d\rho d\phi$. Per la simmetria assiale del problema, l'integrazione in $d\phi$ implica una moltiplicazione per 2π . Si ricava allora:

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{e^{-jk_0(r_1+r_2)}}{z_1 z_2} \rho d\rho d\phi = -jk_0 \frac{E_0}{z_1 z_2} \int_0^R e^{-jk_0(r_1+r_2)} \rho d\rho$$

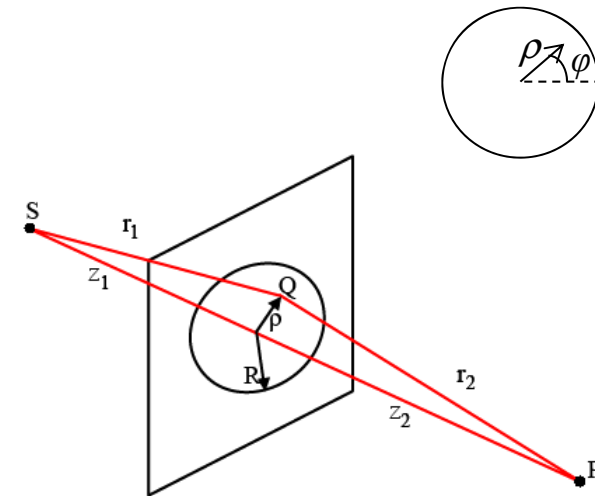
Dato che:

$$r_1 = \sqrt{z_1^2 + \rho^2} \rightarrow \frac{dr_1}{d\rho} = \frac{2\rho}{2\sqrt{z_1^2 + \rho^2}} = \frac{\rho}{r_1} \Rightarrow \rho d\rho = r_1 dr_1,$$

e analogamente: $\rho d\rho = r_2 dr_2$, consegue che:

$$d(r_1 + r_2) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \rho d\rho \Rightarrow \rho d\rho = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} d(r_1 + r_2) \approx \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} d(r_1 + r_2)$$

Sostituendo nell'integrale:
$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{z_1 + z_2} \int_{z_1+z_2}^{r_1(\rho=R)+r_2(\rho=R)} e^{-jk_0(r_1+r_2)} d(r_1 + r_2)$$



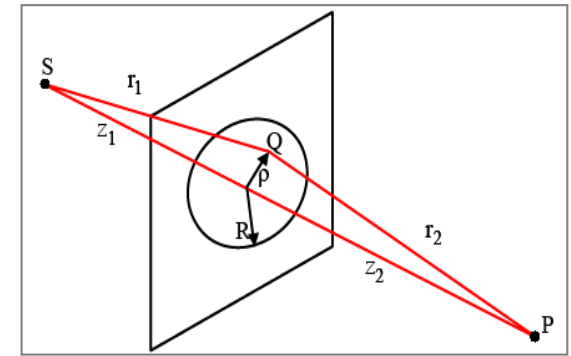
Si noti che $\rho=0$ corrisponde a $r_1 + r_2 = z_1 + z_2$

Differenza di percorso in termini di $\lambda/2$

Introduciamo la quantità q tale che:

$$r_1 + r_2 = z_1 + z_2 + q\lambda/2.$$

In pratica, q misura la differenza tra $r_1 + r_2$ e $z_1 + z_2$ in termini di mezza lunghezze d'onda. Stiamo operando un cambiamento di variabile d'integrazione da r_1+r_2 a q . Si devono determinare i nuovi limiti d'integrazione. Si ha:



q calcolato per $r_1 + r_2 = z_1 + z_2$ è pari a 0

q calcolato per $r_1 + r_2$ corrispondente a $\rho = R$ è pari a: $\frac{R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = 2\delta/\lambda$

Essendo inoltre, $d(r_1+r_2) = (\lambda/2)dq$, E_P assume la seguente forma:

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right)$$

$$E_P = -jk_0(\lambda/2) \frac{E_0 e^{-jk_0(z_1+z_2)}}{z_1 + z_2} \int_0^{2\delta/\lambda} e^{-jk_0(q\lambda/2)} dq = j\pi E_i \int_0^{2\delta/\lambda} e^{-j\pi q} dq = E_i \int_0^{2\delta/\lambda} e^{-j\pi q} d(-j\pi q)$$

dove $E_i = -\frac{E_0 e^{-jk_0(z_1+z_2)}}{z_1 + z_2}$: campo che si avrebbe in P in assenza dell'ostacolo

Campo nel punto di osservazione

Risolovendo l'integrale si ottiene :

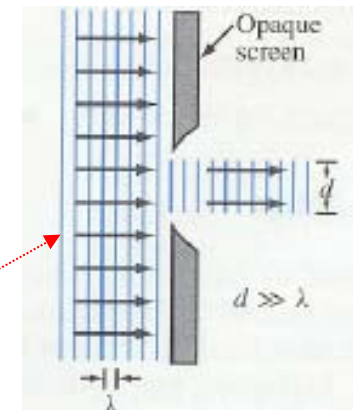
$$E_P = E_i \left[1 - e^{-j\pi(2\delta/\lambda)} \right] = E_i \left[1 - e^{-jk_0\delta} \right] = E_i \left[1 - e^{-j(2\pi/\lambda)\delta} \right] = E_i \left[1 - \cos(2\pi\delta/\lambda) + j \sin(2\pi\delta/\lambda) \right]$$

con :

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) :$$

massima differenza di percorso relativa a sorgenti di Huygens sul perimetro

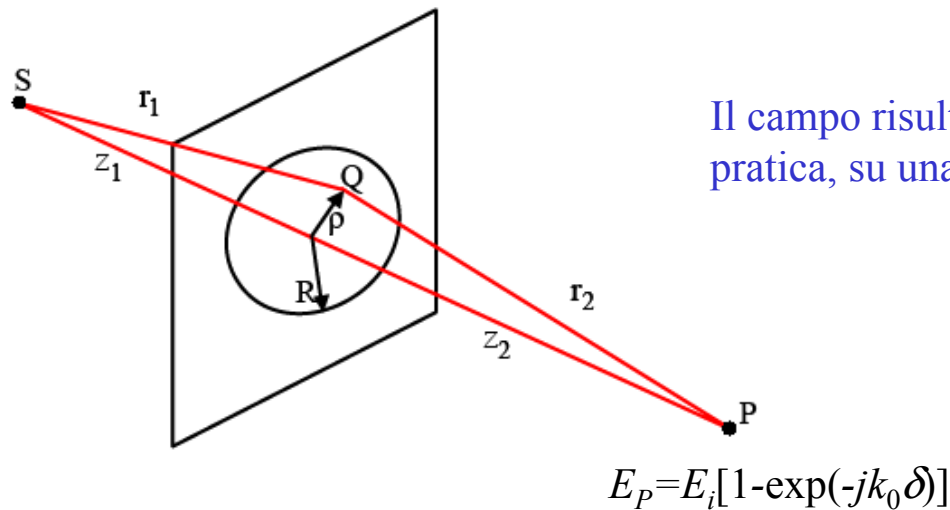
- Il campo nel punto di osservazione P è quindi dato dalla somma di due fasori di pari ampiezza: uno, il campo incidente, fisso e l'altro, dovuto all'ostacolo, caratterizzato da pari modulo, ma rotante al variare dei parametri geometrici.
- Per δ pari a 0 o a multipli di λ il campo totale sarà *nullo*. Per δ pari a multipli dispari di $\lambda/2$, si ha un *raddoppio* del campo rispetto al caso di assenza di schermo. Per $R \gg \lambda \rightarrow E_P \approx E_i$.



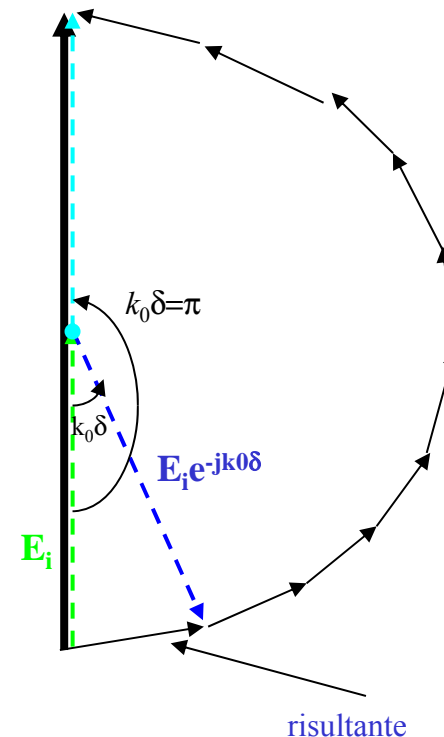
Campo in funzione del raggio dell'apertura

Supponiamo ora che le posizioni di S, di P e del semipiano siano fissate e studiamo l'effetto del progressivo allargamento dell'apertura circolare. Valutiamo quindi la variazione di E_P al crescere del raggio R . Aumentare R corrisponde a far irradiare progressivamente nuovi insiemi di sorgenti di Huygens disposte su corone circolari sempre più ampie. I fasori corrispondenti avranno un ritardo (di fase) sempre crescente. Continuando l'accrescimento dell'apertura si arriverà a:

$$\delta = \lambda/2 \rightarrow E_P = 2E_i$$



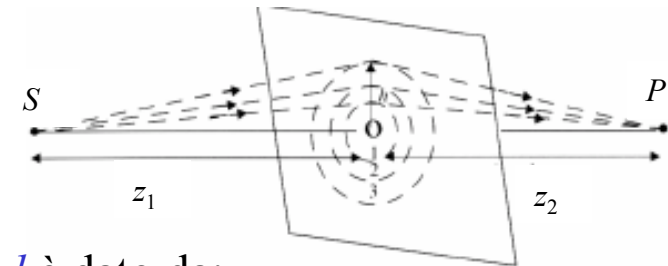
Il campo risultante varia, in pratica, su una circonferenza



Zone di Fresnel

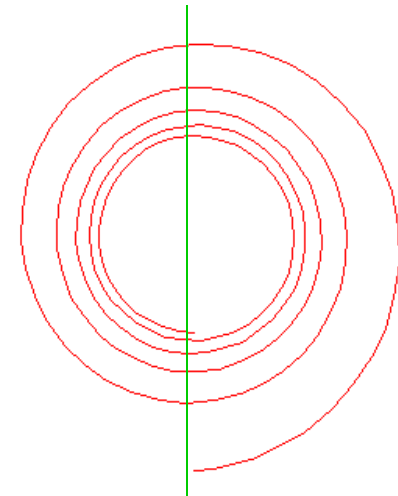
- Un ulteriore accrescimento del raggio R dell'apertura circolare porterebbe poi ad una diminuzione del campo fino al suo annullamento per $\delta = \lambda$. Successivamente, si avrebbe un aumento fino a $(3/2)\lambda$, poi una diminuzione e così via.
- Il raggio corrispondente a $\delta = \lambda/2$ è il **raggio della prima zona di Fresnel**:

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{\lambda}{2} \rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{\lambda z_1 z_2}{z_1 + z_2}}$$



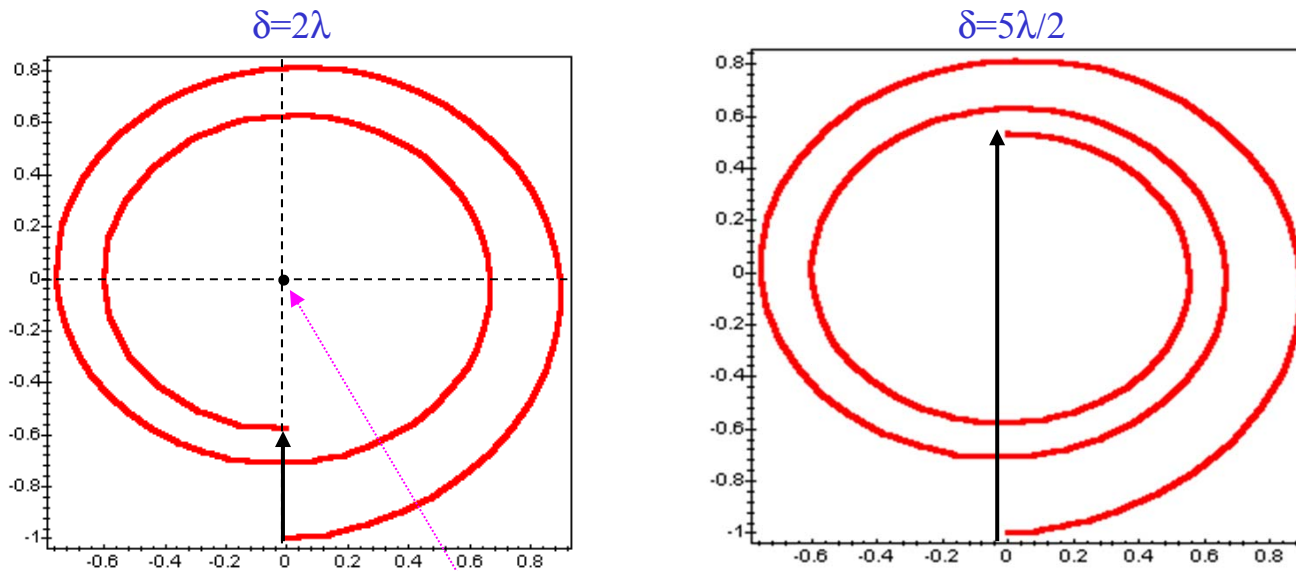
- Generalizzando, *il raggio della n-esima zona di Fresnel* è dato da:

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{n\lambda}{2} \rightarrow R_n = \sqrt{\frac{n\lambda z_1 z_2}{z_1 + z_2}} \propto \sqrt{n}$$



In realtà il campo non varia proprio su una circonferenza poiché all'aumentare di R il fattore di obliquità $F(\theta)$ non si può più trascurare. Ne consegue che il campo varia su una spirale detta *curva di vibrazione*.

Curve di vibrazione



Si vede che per $\delta = (2m)\lambda/2$ ($m=0,1,2,\dots$) il campo è molto attenuato rispetto al campo incidente, mentre per $\delta = (2m+1)\lambda/2$ ($m=0,1,2,\dots$) esso è molto amplificato.

Per $\delta \rightarrow \infty$, $E_p = E_i$ per cui il limite per $R \rightarrow \infty$ della curva di vibrazione è il punto di coordinate (0,0) delle figure.

I° Ellissoide di Fresnel (1/3)

- Per proseguire l'analisi, si deve studiare l'effetto della posizione dell'apertura, sempre fissate le posizioni di S e P. Per fare questo, introduciamo una coordinata z con origine nel punto mediano tra S e P, cosicché risulti:

$$z_1 = d/2 + z, \quad z_2 = d/2 - z$$

dove d indica la distanza tra S e P ($z_1 + z_2 = d$). Immaginiamo di far variare contemporaneamente il raggio R e la posizione z in modo che resti valida la condizione $\delta = \lambda/2$.

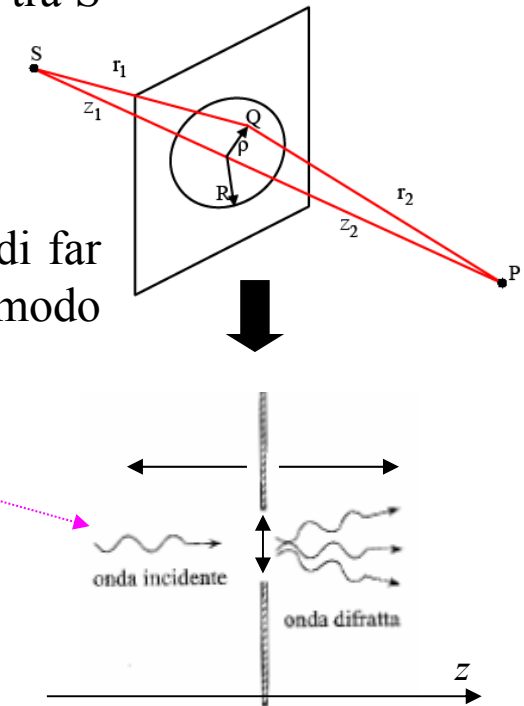
- Si ha:

$$\delta = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{R^2}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{R^2}{2} \frac{d}{d^2/4 - z^2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{R^2}{\lambda} \frac{d}{d^2/4 - z^2} = 1 \Rightarrow \frac{R^2 d}{\lambda} = d^2/4 - z^2 \Rightarrow \frac{R^2}{\lambda} = \frac{d}{4} - \frac{z^2}{d} \Rightarrow$$

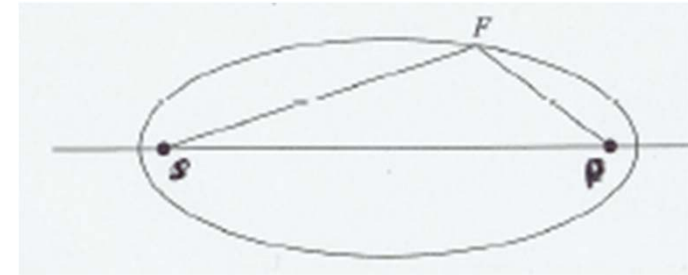
$$\boxed{\frac{R^2}{\lambda} + \frac{z^2}{d} = \frac{d}{4}}$$

→ equazione di un'ellisse nel piano R/z



I° Ellissoide di Fresnel (2/3)

- L'equazione appena ricavata, rappresenta un'ellisse nel piano R/z e, nelle 3 dimensioni, un ellissoide di rotazione attorno all'asse z . Questo ellissoide è detto **I° ellissoide di Fresnel**. Formalmente, il I° ellissoide di Fresnel è definito come il luogo dei punti tali che la somma delle congiungenti con S e P differisce dalla distanza diretta SP , di $\lambda/2$. I punti S e P sono i fuochi dell'ellissoide.
- Altri ellissoidi di Fresnel si possono poi definire per differenze di percorso pari a $n \lambda/2$.
- *Sebbene il concetto di ellissoide di Fresnel sia stato derivato da un caso di scarsa importanza pratica, assegnati due punti fissi S e P è sempre possibile identificare, per una data frequenza, il primo ellissoide di Fresnel.*
- In generale, ogni volta che c'è un ostacolo che si frappone nel cammino di propagazione si può sempre costruire il I° (n -esimo) ellissoide di Fresnel tra le antenne T_x e R_x unendo tutti i punti per i quali l'eccesso di percorso rispetto al cammino diretto è pari a $\lambda/2$ ($n\lambda/2$).



I° Ellissoide di Fresnel (3/3)

Se c'è un ostacolo tra sorgente ed osservatore. Possiamo distinguere tre situazioni diverse:

- **ostacolo esterno al I° ellissoide di Fresnel**: il campo potrà aumentare o diminuire rispetto al campo incidente con uguale probabilità (figura 1).
- **ostacolo interno al I° ellissoide di Fresnel**: il campo potrà solo diminuire rispetto al campo incidente (figura 2).
- **I° ellissoide di Fresnel totalmente ostruito**: il campo subirà una forte attenuazione rispetto al campo incidente (figura 3)

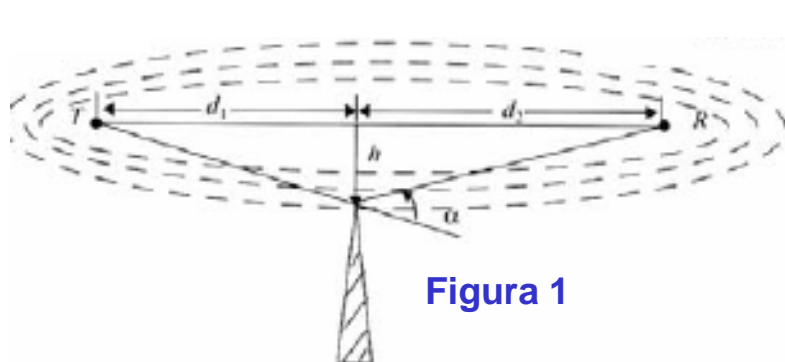


Figura 1

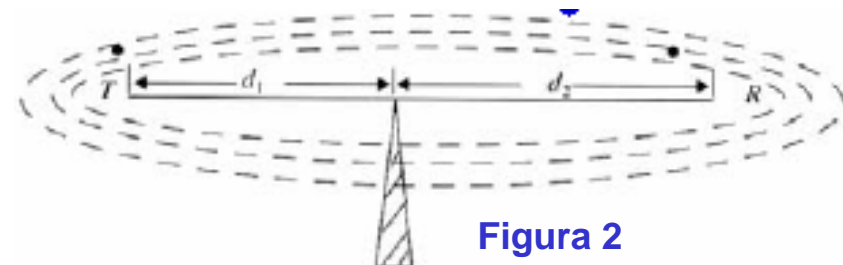
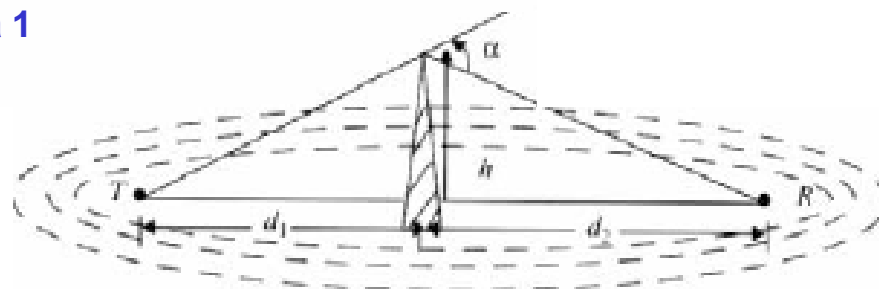


Figura 2

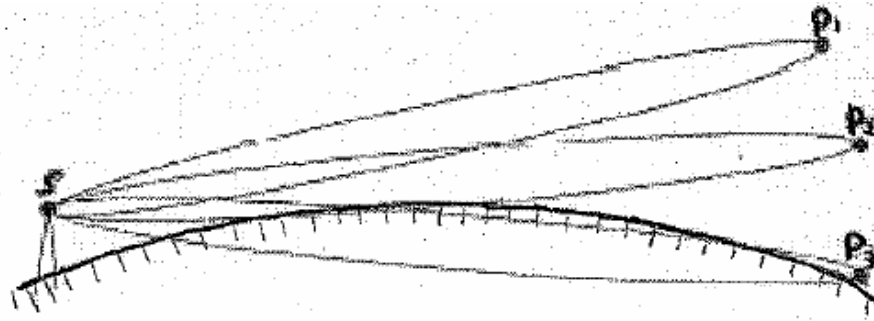


(a) α and ν are positive, since h is positive

Figura 3

Visibilità, ombra e penombra

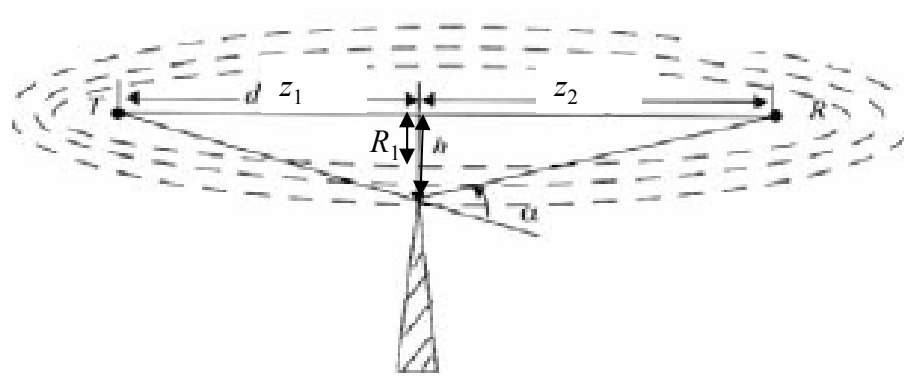
- La condizione di mantenere il I° ellissoide di Fresnel sgombro da ostacoli costituisce il miglior compromesso, per un collegamento in ponte radio (ossia tra punti fissi) tra i due casi estremi di ostacoli troppo vicini alla congiungente SP e di cammino completamente libero da ostacoli. Quest'ultimo caso comporterebbe l'utilizzo di antenne molto alte rispetto al terreno. Nel caso invece della radio o video diffusione, è necessario installare postazioni d'antenna elevate poiché non si può garantire che il I° ellissoide sia libero sempre e comunque su tutta l'area servita dall'emittente.
- Se la congiungente SP è libera da ostacoli, il collegamento si dice in **visibilità** (LOS). Altrimenti collegamento non-LOS
- In relazione al I° ellissoide di Fresnel si hanno anche le seguenti definizioni:
 - Se il I° ellissoide è sgombro si parla di collegamento in **piena visibilità**
 - Se il I° ellissoide è parzialmente ostruito, il punto P è in **penombra** rispetto ad S
 - Se il I° ellissoide è totalmente ostruito, il punto P è in **ombra** rispetto a S



Franco dell'ostacolo

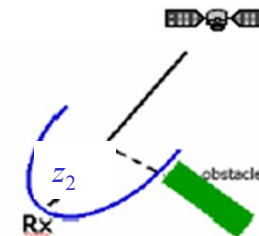
- La distanza tra raggio diretto (congiungente SP) ed ostacolo è detta FRANCO (h). Detto R_1 il raggio della prima zona di Fresnel, la condizione di piena visibilità (1° ellissoide totalmente sgombro) è:

$$h > R_1 = \sqrt{\frac{\lambda z_1 z_2}{z_1 + z_2}}$$



Per collegamenti satellitari, $z_1 \rightarrow \infty$ per cui:

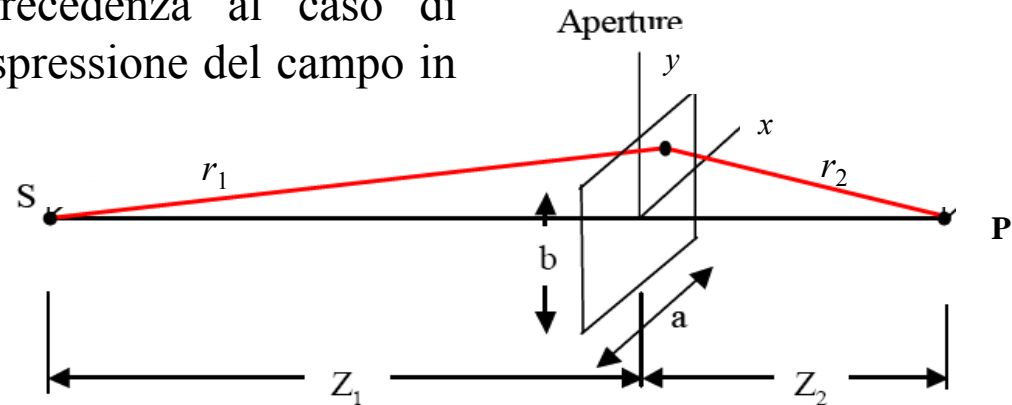
$$R_1 = \sqrt{\lambda z_2}$$



Diffrazione da semipiano indefinito (1/2)

- Per estendere quanto visto in precedenza al caso di semipiano indefinito, torniamo all'espressione del campo in P scritta inizialmente:

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{2\pi} \int_A \frac{e^{-jk_0(r_1+r_2)}}{r_1 r_2} dS$$



Se l'apertura non è circolare, ma rettangolare si ha (ammettendo sempre per il denominatore dell'integrando $1/r_1 r_2 \approx 1/z_1 z_2$)

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{-jk_0(r_1+r_2)}}{z_1 z_2} dx dy$$

$$r_1 \approx z_1 \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1^2}\right) = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1}; \quad r_2 \approx z_2 \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_2^2}\right) = z_2 + \frac{x^2 + y^2}{2z_2} \Rightarrow$$

$$E_P = -jk_0 \frac{E_0}{2\pi} e^{-jk_0(z_1+z_2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{e^{-j\frac{k_0}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(x^2+y^2)}}{z_1 z_2} dx dy$$

Diffrazione da semipiano indefinito (2/2)

Operiamo il seguente cambio di variabili:

$$u = y \sqrt{\frac{2(z_1 + z_2)}{\lambda z_1 z_2}}; \quad w = x \sqrt{\frac{2(z_1 + z_2)}{\lambda z_1 z_2}}$$

$$E_i = -\frac{E_0 e^{-jk_0(z_1+z_2)}}{z_1 + z_2} :$$

campo che si avrebbe in P in assenza dell'ostacolo

Il campo in P si può scrivere allora come:

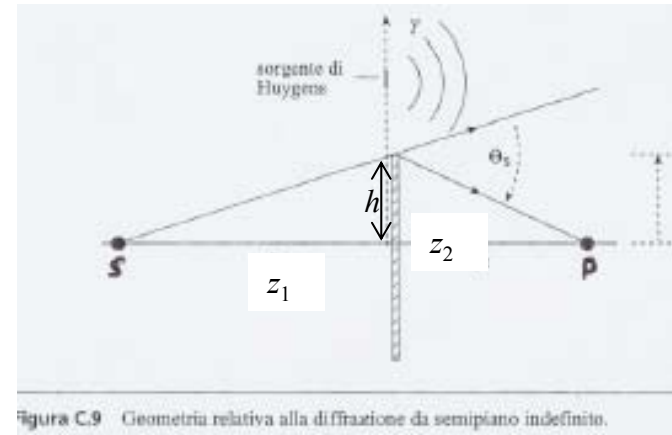
$$E_P = j \frac{E_i}{2} \int_{u(-b/2)}^{u(b/2)} e^{-j\pi \frac{u^2}{2}} du \int_{w(-a/2)}^{w(a/2)} e^{-j\pi \frac{w^2}{2}} dw = E_i \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_{u(-b/2)}^{u(b/2)} e^{-j\pi \frac{u^2}{2}} du \right] \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_{w(-a/2)}^{w(a/2)} e^{-j\pi \frac{w^2}{2}} dw \right]$$

Nel caso di semipiano indefinito, $w(-a/2) = -\infty$; $w(a/2) = +\infty$ ed il II° termine tra parentesi quadra vale 1. Inoltre, $u(-b/2) = v$, che rappresenta la coordinata del bordo dell'ostacolo (il franco h) e $u(b/2) = +\infty$. Di conseguenza:

$$E_P = E_i \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_v^{\infty} e^{-j\pi \frac{u^2}{2}} du \right]$$

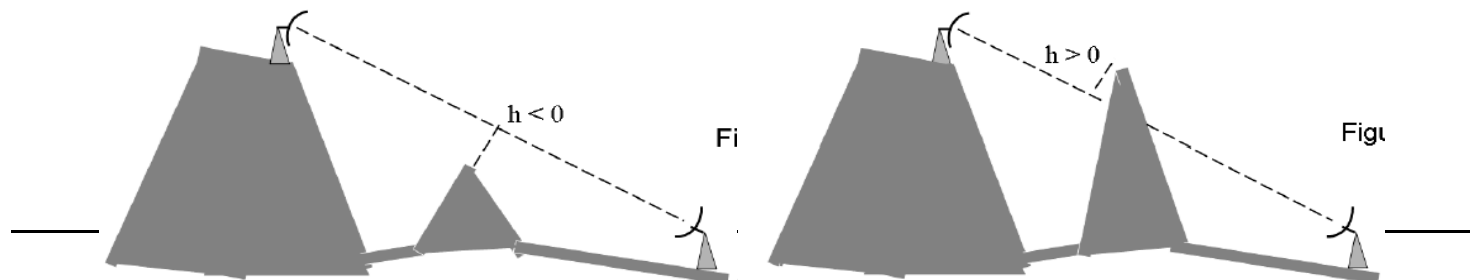
Con:

$$v = h \sqrt{\frac{2(z_1 + z_2)}{\lambda z_1 z_2}}$$



Applicazione pratica

- Il problema dell'ostacolo si pone quando, lungo la tratta che congiunge due antenne, sono presenti rilievi o edifici tali da alterare le proprietà dell'onda rispetto a quelle di spazio libero. Il segnale radio può propagarsi oltre l'orizzonte ed al di là di ostacoli. Sebbene il livello del segnale ricevuto diminuisca rapidamente man mano che il ricevitore si sposta all'interno della zona d'ombra, il campo diffratto può produrre un segnale utile di potenza apprezzabile.
- E' fondamentale poter stimare l'attenuazione dovuta alla presenza di ostacoli. Nel caso semplice di ostacolo singolo (edificio, collina, ...), esso si può schematizzare a lama di coltello (si parla di *knife edge diffraction*) ed il problema è riconducibile alla teoria della diffrazione da aperture.
- Nel caso della figura a sinistra, l'ostacolo è al di sotto della congiungente tra le due antenne, per cui introduce perturbazioni limitate, anche se non trascurabili. Nel caso della figura di destra, l'ostacolo è al di sopra della congiungente stessa, per cui produce attenuazione, ma la potenza che raggiunge il terminale ricevente può essere ancora apprezzabile.



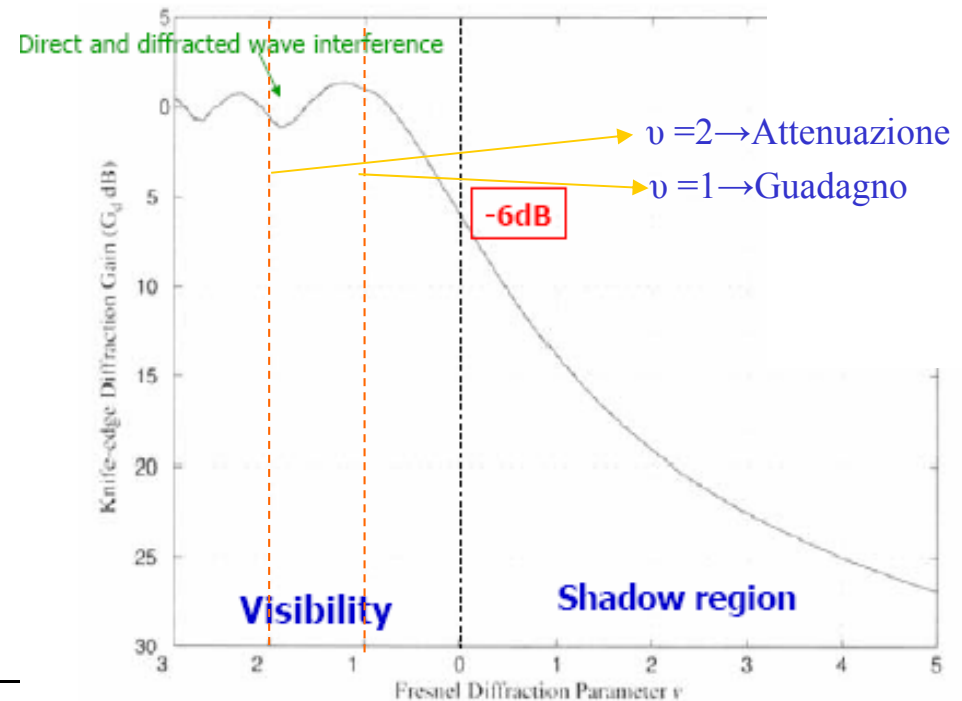
Guadagno di diffrazione

Torniamo all'espressione $E_P = E_i \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_v^\infty e^{-j\pi \frac{u^2}{2}} du \right]$, con $v = h \sqrt{\frac{2(z_1 + z_2)}{\lambda z_1 z_2}}$

Tre casi particolari sono importanti:

- $v = -\infty \rightarrow E_P = E_i$. Il semipiano è talmente basso che il suo effetto in P è nullo
- $v = 0 \rightarrow E_P = E_i/2$. Caso di perfetta radenza (perdita di 6 dB)
- $v = +\infty \rightarrow E_P = 0$. Il semipiano è talmente alto che isola P rispetto alla sorgente

L'andamento del modulo di E_P/E_i (che, in dB, è detto *guadagno di diffrazione*: G_d) in funzione di v è illustrato in figura. Essa rappresenta il classico caso di *interferenza tra onda diretta ed onda diffratta per ostacolo a lama di coltello (Knife-Edge diffraction)*. La quantità v è detta in questo caso *parametro di diffrazione di Fresnel*.



Andamento del fasore campo elettrico

- Il fasore campo elettrico in P ha un andamento normalizzato a doppia spirale come il seguente:

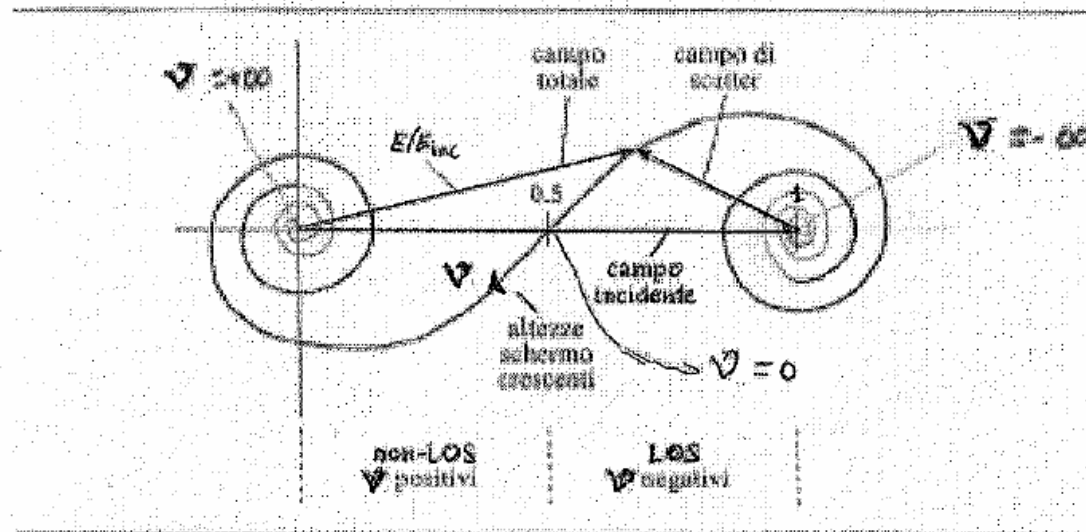


Figura C.10 Fasore di campo (normalizzato al campo incidente) per diverse altezze del acri piano (schermo).

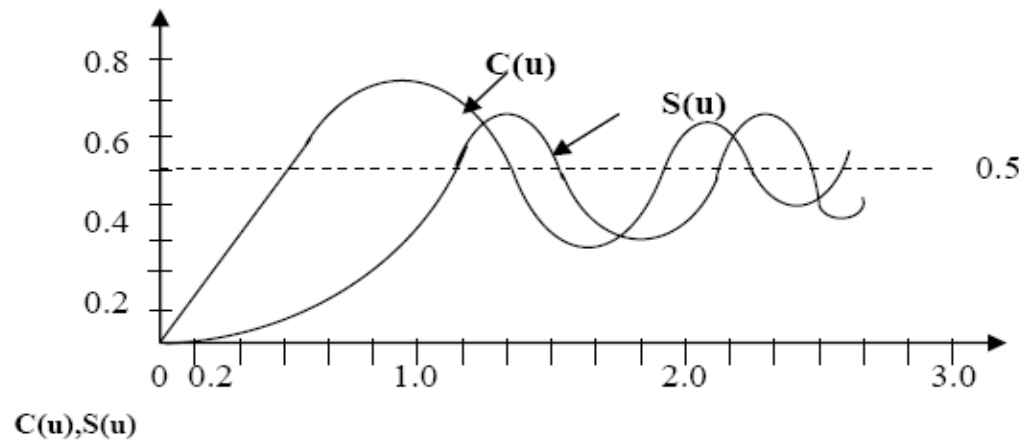
- La curva che rappresenta il fasore campo elettrico in P, è derivata da un'altra curva, nota come *spirale di Cornu*, che rappresenta una funzione, detta *integrale di Fresnel*.

Integrale di Fresnel

L'integrale di Fresnel è dato da :

$$\int_0^u e^{-j\frac{\pi}{2}u^2} du = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du - j \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du = C(u) - jS(u)$$

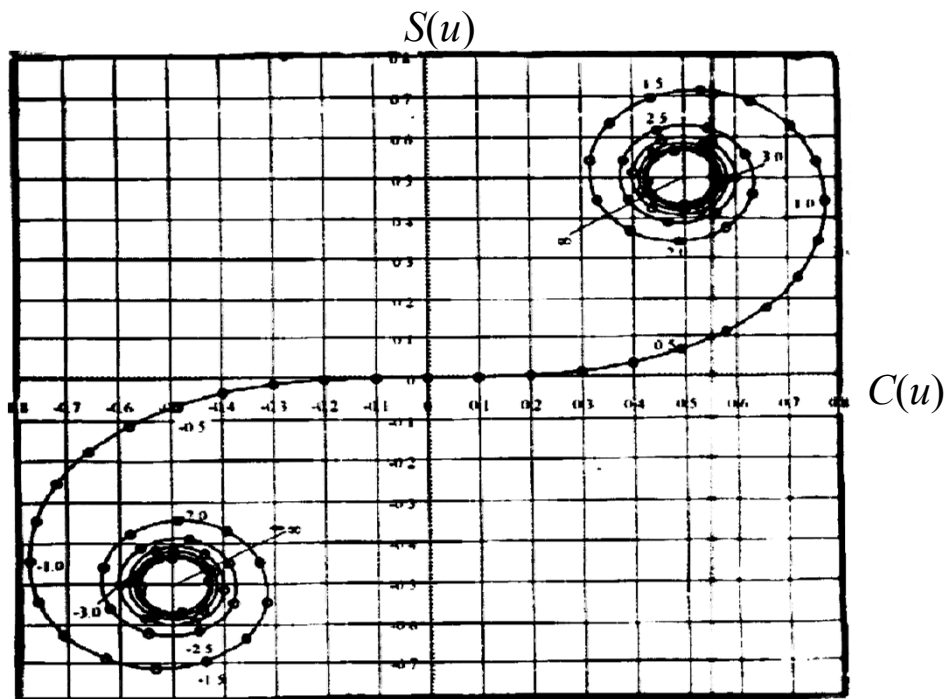
$C(u)$ e $S(u)$ rappresentano le funzioni di Fresnel



Si ha quindi :

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-j\pi\frac{u^2}{2}} du \right] \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_{w_1}^{w_2} e^{-j\pi\frac{w^2}{2}} dw \right] \\ &= \sqrt{\frac{j}{2}} \{ [C(u_2) - jS(u_2)] - [C(u_1) - jS(u_1)] \} \sqrt{\frac{j}{2}} \{ [C(w_2) - jS(w_2)] - [C(w_1) - jS(w_1)] \} \end{aligned}$$

Spirale di Cornu



Si può notare che :

$$u \rightarrow 0, \quad C = 0, \quad S = 0$$

$$u \rightarrow \infty, \quad C = 0.5, \quad S = 0.5$$

Inoltre: $S(-u) = -S(u)$ e $C(-u) = -C(u)$.

L'elongazione massima dall'origine si ha per $u = 1.25$ dove: $\sqrt{C^2 + S^2} \cong 0.92$

$$S_{\max} = 0.72 \quad \text{per } u = 1.4;$$

$$C_{\max} = 0.75 \quad \text{per } u = 1.$$

Ne segue che :

$$E_P / E_i = \left[\sqrt{\frac{j}{2}} \int_v^\infty e^{-j\pi \frac{u^2}{2}} du \right] = \sqrt{\frac{j}{2}} \{ [0.5 - j0.5] - [C(v) - jS(v)] \} \Rightarrow$$

$$|E_P / E_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} |0.5(1 - j) - [C(v) - jS(v)]|$$

$$\left(\sqrt{j} = (1 + j) / \sqrt{2}; \quad |1 + j| = \sqrt{2} \right)$$

Formule di Lee per il guadagno di diffrazione

L'andamento del guadagno di diffrazione G_d può esprimersi per mezzo delle seguenti formule semplificate che approssimano bene le teoria esatta:

$$G_d(\text{dB}) = 0 \quad v \leq -1$$

$$G_d(\text{dB}) = 20 \log(0.5 - 0.62v) \quad -1 \leq v \leq 0$$

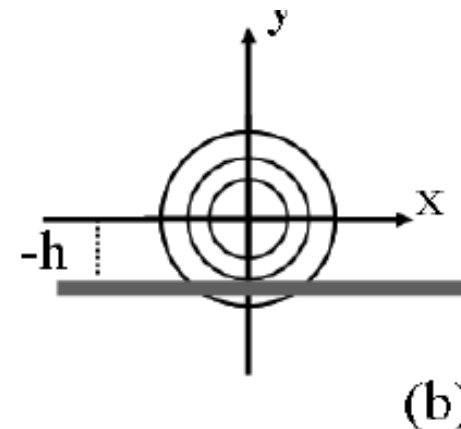
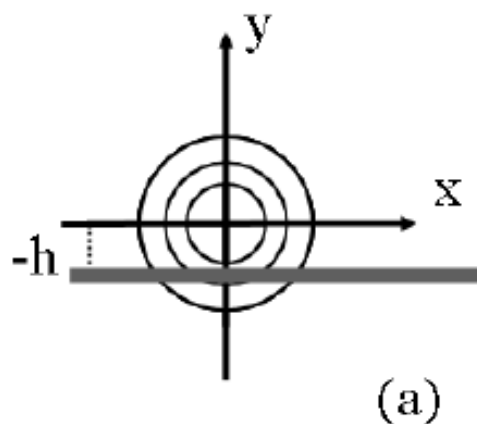
$$G_d(\text{dB}) = 20 \log(0.5 \exp(-0.95v)) \quad 0 \leq v \leq 1$$

$$G_d(\text{dB}) = 20 \log\left(0.4 - \sqrt{0.1184 - (0.38 - 0.1v)^2}\right) \quad 1 \leq v \leq 2.4$$

$$G_d(\text{dB}) = 20 \log\left(\frac{0.225}{v}\right) \quad v > 2.4$$

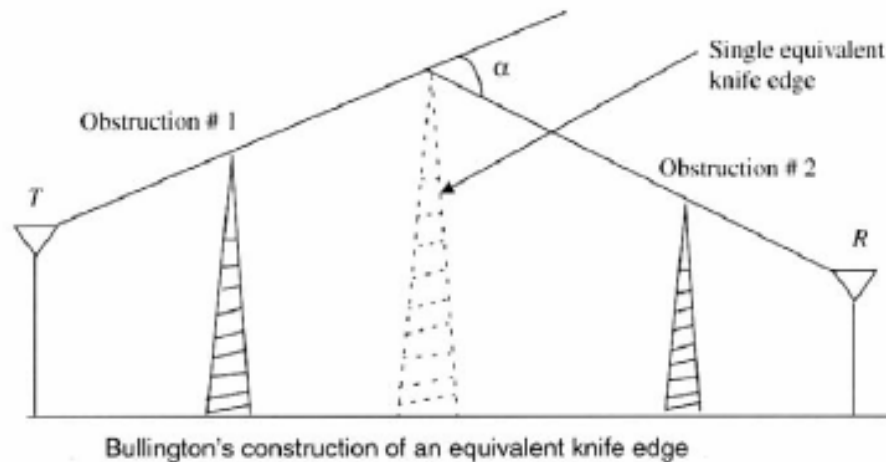
Interpretazione andamento G_d

- Al crescere di v verso valori positivi sempre maggiori, l'ostacolo maschera sempre di più la congiungente tra le antenne e G_d tende rapidamente a 0.
- Facendo invece diminuire v , a partire dal valore $v=0$, si ha un andamento oscillante.
 - G_d presenta il primo massimo quando l'ostacolo non tocca la prima zona di Fresnel, ma maschera parzialmente la seconda (Figura a).
 - Il primo minimo si ha quando l'ostacolo non tocca la seconda zona di Fresnel, ma maschera la terza (Figura b). Aumenti ulteriori del franco h verso valori negativi producono un alternarsi di massimi e minimi (sempre meno accentuati al diminuire di v) a seconda che siano mascherate zone di Fresnel di ordine pari o di ordine dispari.



Caso dell'ostacolo multiplo

- In generale, tra le due antenne saranno presenti numerosi ostacoli. Per tenerne conto, sono state sviluppate diverse teorie che stimano il guadagno di diffrazione complessivo, utilizzando opportunamente la teoria del singolo ostacolo. Se ne riportano in seguito alcune.
- Una teoria molto semplice (Bullington) consiste nel sostituire alla serie di ostacoli un ostacolo singolo equivalente in modo da riportarsi al problema dell'ostacolo singolo già noto. Gli errori possono essere notevoli.



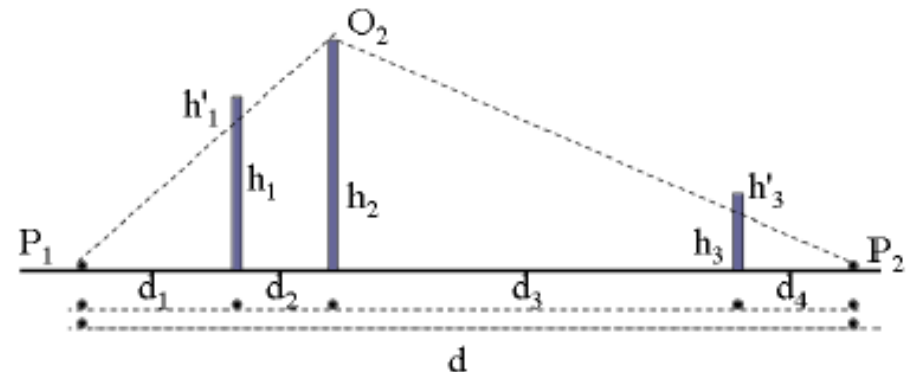
Metodo di Deygout

Una teoria più rigorosa rispetto al caso precedente, si basa sui seguenti passi. Siano h_i l'altezza dell'ostacolo i -esimo, d la distanza totale del collegamento e D_i la distanza dell'ostacolo i -esimo dall'antenna Tx:

$$D_i = \sum_{k=1}^i d_k$$

Il parametro di diffrazione per l'ostacolo i -esimo è:

$$v_i = h_i \sqrt{\frac{2d}{\lambda D_i (d - D_i)}}$$



Si procede in questa maniera:

- Detto m il valore di i per cui v_i è massimo (ostacolo principale, nell'esempio $m=2$), si calcola il guadagno di diffrazione G_{dm} .
- Si considerano, successivamente, i due subcollegamenti tra il bordo dell'ostacolo principale (O_2 nell'esempio) ed i due punti P_1 e P_2 . Per ciascuno dei due sub-collegamenti, si determinano i nuovi ostacoli principali (m'_1, m'_2) e si calcolano i nuovi guadagni di diffrazione parziali G'_{dm1} e G'_{dm2} .
- Si procede poi iterativamente, fino ad esaurire tutti gli ostacoli. Alla fine si sommano (in dB) i guadagni di diffrazione parziali.

Esempio sul metodo di Deygout

- Nell'esempio di figura si hanno 3 ostacoli e quindi sono sufficienti 2 iterazioni.

- Essendo $m=2$ calcoliamo:
$$v_2 = h_2 \sqrt{\frac{2d}{\lambda D_2(d-D_2)}} = h_2 \sqrt{\frac{2d}{\lambda(d_1+d_2)(d-d_1-d_2)}}$$

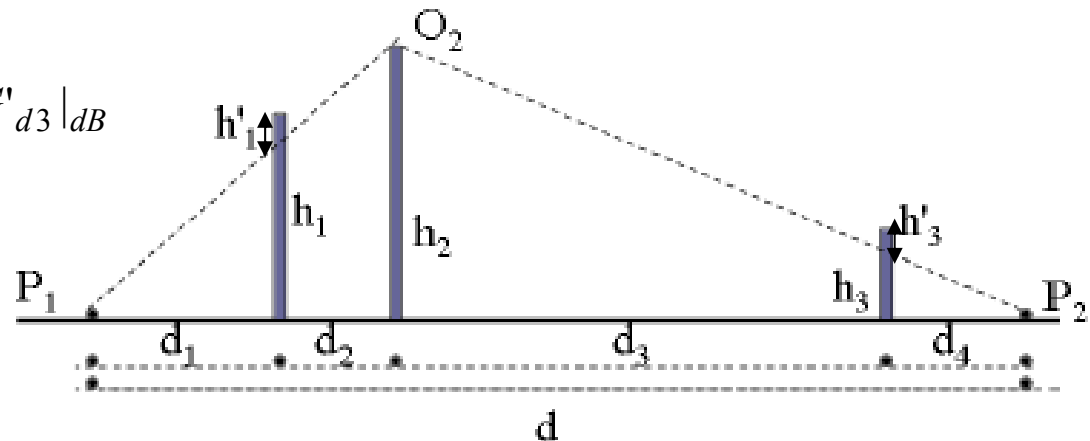
Si noti che: $d - d_1 - d_2 = d_3 + d_4$

- Noto v_2 si determina G_{d2} (p.es. con formule di Lee)

- Essendo $m'_1=1$ ed $m'_2=3$ calcoliamo:
$$v_1 = h'_1 \sqrt{\frac{2(d_1+d_2)}{\lambda d_1 d_2}}; \quad v_3 = h'_3 \sqrt{\frac{2(d_3+d_4)}{\lambda d_3 d_4}}$$

Si noti che si è approssimato $\overline{P_1 O_2}$ con $d_1 + d_2$
e $\overline{O_2 P_2}$ con $d_3 + d_4$

- Si determinano G'_{d1} e G'_{d3}
- $G_{TOT} |_{dB} = G_{d2} |_{dB} + G'_{d1} |_{dB} + G'_{d3} |_{dB}$

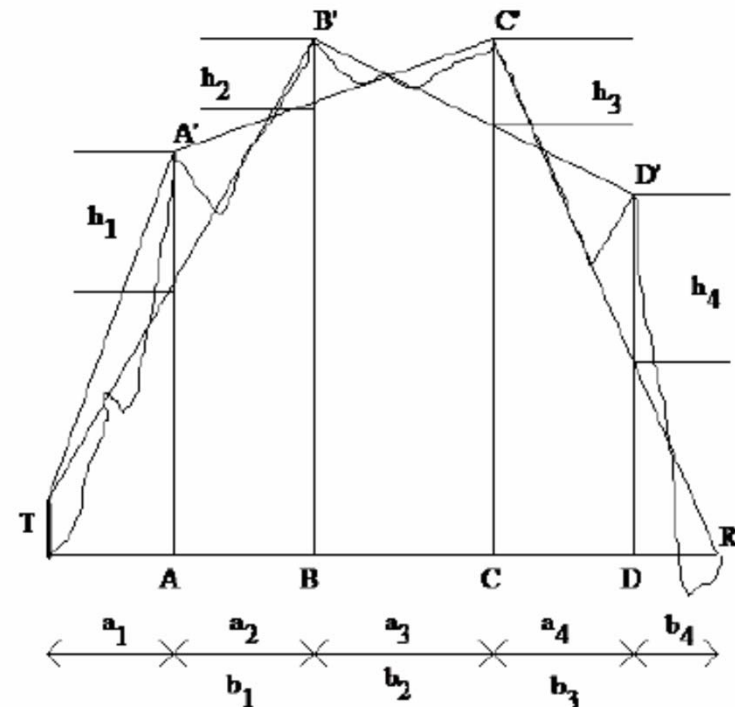


Metodo di Epstein-Peterson

- A ciascun ostacolo è associato un cammino parziale individuato da ostacolo precedente e da ostacolo seguente (R e T agli estremi del profilo).
- Con riferimento alla figura si ha in questo caso:

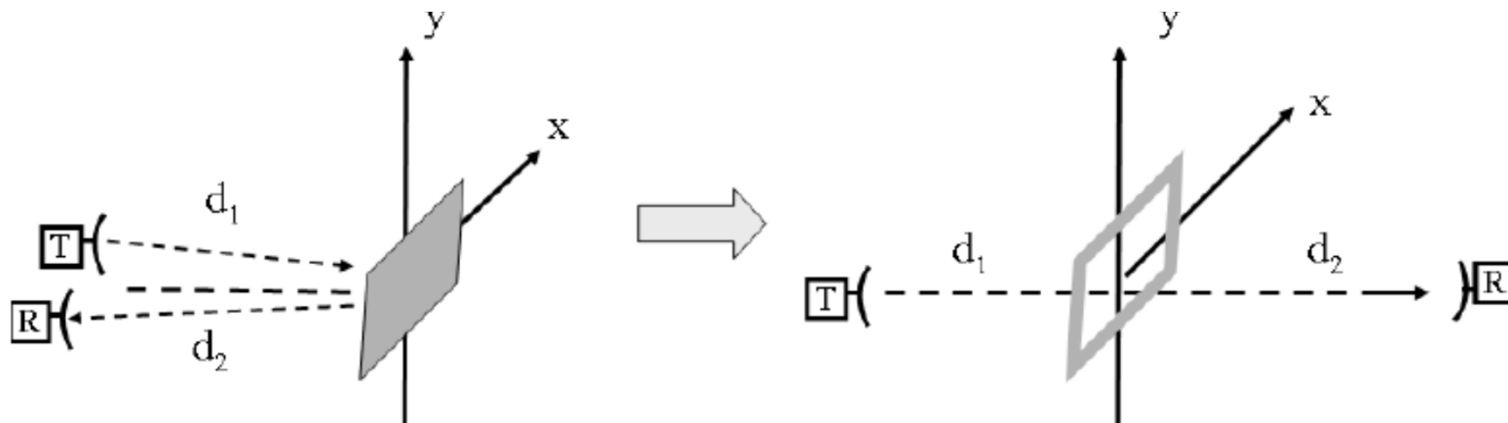
$$v_i = h_i \sqrt{\frac{2(a_i + b_i)}{\lambda a_i b_i}}, \quad i = 1, \dots, N$$

- Il guadagno di diffrazione (da aggiungere alla attenuazione di spazio libero) è valutato come somma (in dB) dei singoli G_d sui cammini parziali.



Specchi di antenna (1/2)

- Per ottenere la visibilità tra trasmettitore e ricevitore, spesso è necessario installare l'antenna su dei tralicci molto alti, questo comporta due tipi di inconvenienti, infatti da un lato si ha un innalzamento dei costi e dall'altro è necessario utilizzare un percorso in guida d'onda più lungo. Per ovviare a ciò, vengono utilizzati ripetitori passivi, detti *specchi*, aventi forma piana e buona conducibilità, che reirradiano verso l'antenna ricevente la potenza proveniente dall'antenna trasmittente.



Specchi di antenna (2/2)

- Sia dato uno specchio quadrato di lato a , collocato a distanza d_1 dall'antenna trasmittente e d_2 dall'antenna ricevente. Supponiamo inoltre, come avviene in pratica, che l'angolo formato dalla direzione di incidenza e da quella di riflessione con la normale allo specchio siano piccoli. Per il principio delle immagini, è come se le antenne fossero collegate da un'unica congiungente rettilinea e, a distanza d_1 dalla trasmittente, fosse presente uno schermo con un'apertura quadrata.

- Si possono applicare i risultati visti in precedenza:

$$E_p/E_i = \frac{j}{2} \{ [C(u_2) - jS(u_2)] - [C(u_1) - jS(u_1)] \}^2 = \frac{j}{2} \{ 2[C(u_2) - jS(u_2)] \}^2 \Rightarrow$$

$$|E_p/E_i| = 2[C^2(u_2) + S^2(u_2)]$$

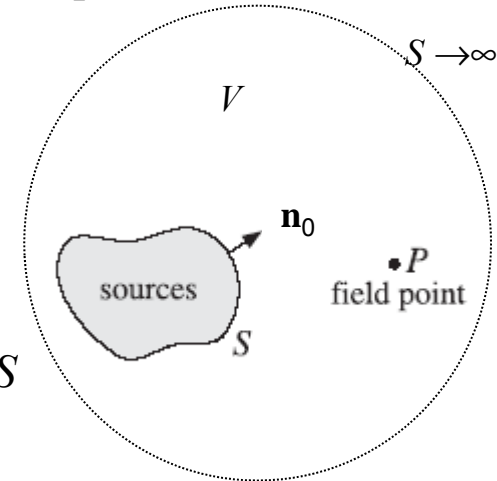
- Anche in questo caso si avranno massimi e minimi e scegliendo opportunamente d_1 , d_2 e le dimensioni dello specchio, quest'ultimo può contenere al suo interno solo la prima zona di Fresnel per cui la potenza ricevuta può essere maggiore di quella che si sarebbe avuta con due antenne in visibilità diretta.

Estensione vettoriale della formula di Fresnel-Kirchoff

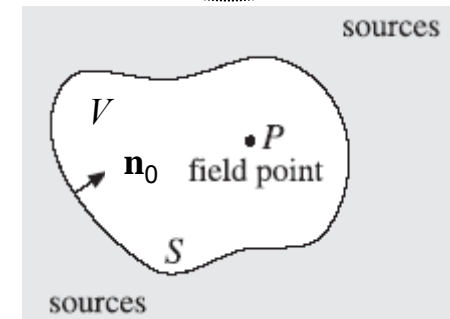
La formula di Fresnel-Kirchoff riguarda i campi scalari e risulta quindi utile per casi in cui una singola componente del campo è sufficiente per descrivere il problema. Si dimostra che l'estensione vettoriale conduce alla **formula di radiazione di Kottler / Stratton - Chu** per il caso di sorgenti esterne al volume V (ovvero in funzione del campo e.m. sulla superficie S che racchiude V):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_S \left\{ G \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} - \mathbf{E} \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS =$$

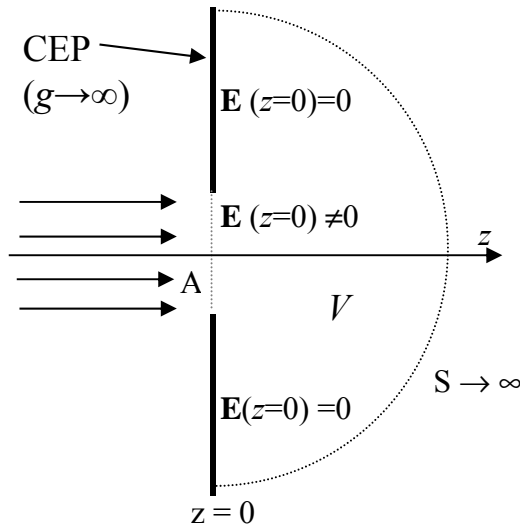
$$= \oint_S \left\{ -j\omega\mu G(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}) + \frac{1}{j\omega\epsilon} [(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}) \cdot \nabla] \nabla G - (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}) \times \nabla G \right\} dS$$



La soluzione del campo in un determinato volume V (privo di sorgenti interne) è completamente determinata se si conoscono le componenti tangenziali dei campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} (esterni a V) sulla superficie S che racchiude V (cfr. teorema di equivalenza).

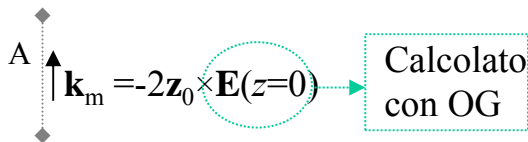


Applicazione al caso di un'apertura su schermo metallico: introduzione all'Ottica Fisica



In questo caso, lo schermo metallico crea un campo diffratto che si sovrappone al campo incidente. Applicando i teoremi di equivalenza e dell'immagine possiamo sostituire lo schermo con una lamina di corrente magnetica $\mathbf{k}_m = -2\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}(z=0)$ presente solo sull'apertura. \mathbf{k}_m è incognito essendo incognito il campo tangenziale su A ($-2\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}(z=0)$). Una semplificazione che comunemente viene usata consiste nell'assumere che l'onda incidente sull'apertura sia esprimibile per mezzo dell'ottica geometrica.

Teo. Equivalenza: La struttura si sostituisce con delle correnti magnetiche equivalenti \mathbf{k}_m su A :



In pratica si usa l'OG per calcolare i campi tangenziali che compaiono nell'integrale di Stratton-Chu. La superficie chiusa S che racchiude V è formata dalla semisfera all'infinito e dal piano $z=0$. I campi tangenziali sono $\neq 0$ solo sull'apertura A .

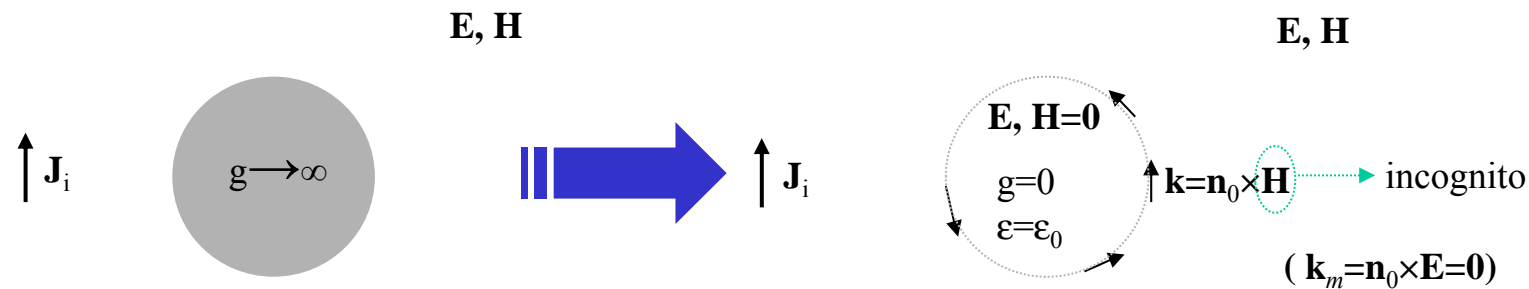
*L'approssimazione consistente nell'uso dell'ottica geometrica per calcolare il campo su una superficie e nell'integrare quest'ultimo per determinare il campo nel volume racchiuso dalla superficie stessa è nota come **approssimazione dell'Ottica Fisica**.*

Ottica Fisica

- La formula di Fresnel-Kirchoff vettoriale non conduce generalmente a soluzioni analitiche a meno di introdurre delle semplificazioni. Una approssimazione molto comune è quella dell'*Ottica Fisica* (OF) che si basa sull'uso dell'ottica geometrica per determinare i termini $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}$ e $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ presenti nella formula stessa.
- L'OF è anch'essa un'approssimazione valida per alte frequenze, ovvero per piccole lunghezza d'onda. La si può considerare una teoria intermedia tra la OG e la Teoria EM. La parola "fisica" non vuol dire che è una teoria esatta (è sempre un'approssimazione), ma solo che ha basi fisiche più solide rispetto all'Ottica Geometrica.
- Poiché l'Ottica Fisica è molto più complicata dell'Ottica Geometrica, ove possibile si tende ad usare quest'ultima.
- L'OF non permette di trattare in modo accurato problemi quali quelli diffrazione da spigolo o riflessione con incidenza radente su superficie curva

Applicazione dell'Ottica Fisica al caso di un ostacolo metallico (1/2)

- Consideriamo una sorgente \mathbf{J}_i che agisce in un mezzo omogeneo delimitato dalla sfera all'infinito contenente un ostacolo metallico. L'ostacolo crea un campo diffuso \mathbf{E}_s che si sovrappone all'onda incidente \mathbf{E}_i ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$). Applichiamo il teorema di equivalenza per il caso di presenza di ostacoli (*teorema d'induzione*): imponiamo campo nullo all'interno dell'ostacolo così da poterlo rimuovere e sostituire con una lamina di corrente \mathbf{k} [A/m] (vedi figura)

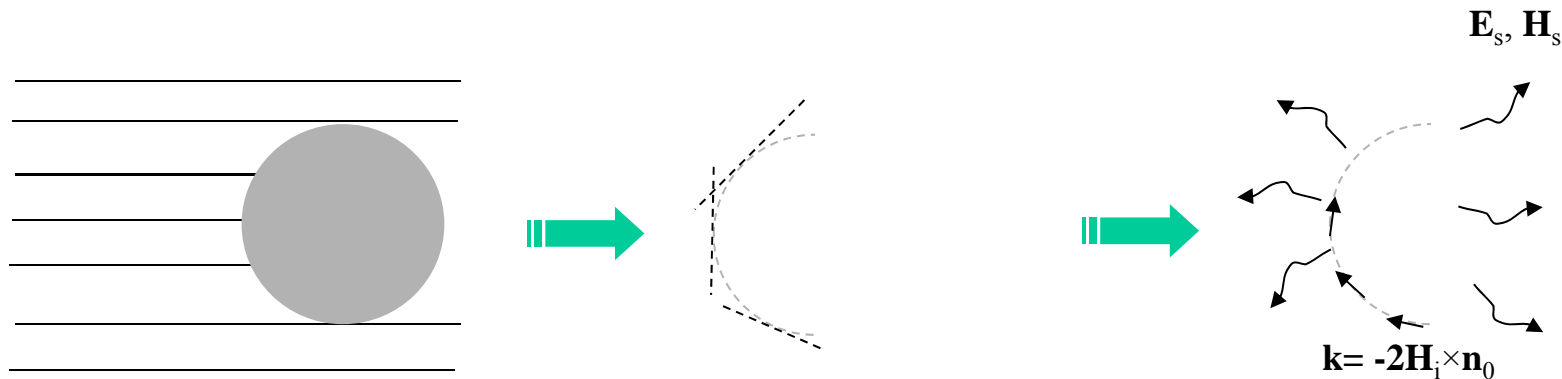


- \mathbf{k} crea il campo diffuso \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s ed è incognito. Se però l'onda incidente soddisfa le condizioni di OG ed i raggi di curvatura della superficie dell'ostacolo sono $\gg \lambda$, si può assumere che la corrente indotta nei punti della superficie investiti dai raggi incidenti sia dovuta al *solo campo incidente*, attraverso la stessa espressione che vale nel caso di un'onda piana uniforme (OPU) che incide su un conduttore metallico piano.

Applicazione dell'Ottica Fisica al caso di un ostacolo metallico (2/2)

- La situazione è assimilabile a quella di *un'OPU che incide su un piano indefinito conduttore, tangente in ogni punto alla superficie dell'ostacolo illuminata dai raggi ottici*, per cui, lavorando localmente, possiamo approssimare punto per punto la parte illuminata dell'ostacolo ad un piano ad esso tangente. Ci riconduciamo quindi allo studio di un problema di riflessione di un'onda piana su un piano conduttore per il quale si ha:

$$\mathbf{k} \approx -2\mathbf{H}_i \times \mathbf{n}_0 \quad (\mathbf{n}_0 \text{ è la normale punto per punto alla superficie})$$

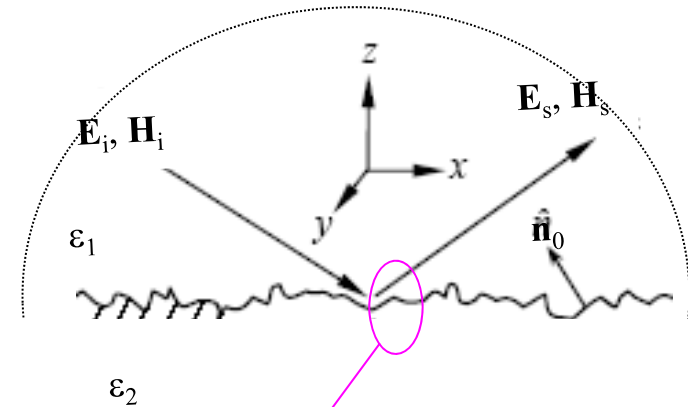


- A differenza dell'onda incidente, l'onda diffusa non è rappresentata da un fascio di raggi e si calcola sostituendo $\mathbf{k} = -2\mathbf{H}_i \times \mathbf{n}_0$ nell'integrale di Stratton-Chu

Applicazione dell'Ottica Fisica al caso di superficie rugosa

Supponiamo che un'OPU incida su una superficie rugosa per la quale l'altezza non sia trascurabile rispetto a λ . In questo caso non si può usare l'SPM. Tuttavia se il raggio di curvatura della superficie è \gg di λ e se il campo incidente soddisfa le condizioni di OG, si può, come nel caso precedente, assumere che le correnti indotte sulla superficie, che originano il campo diffuso, siano dovute al solo campo incidente attraverso l'espressione che vale per un'OPU che incide su un piano tangente punto per punto alla superficie (solo la parte illuminata).

Il campo diffuso si calcola integrando tali correnti indotte secondo la formula di Stratton-Chu.



L'assunzione per cui il campo superficiale è approssimato con quello che sarebbe presente se la superficie fosse sostituita da un piano tangente nel punto d'interesse è detta *approssimazione di Kirchoff o di piano tangente*

