SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ottica geometrica

Equazioni fondamentali

- Nell'ottica geometrica (OG), si assume che il campo elettrico abbia la seguente forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-jk_0L(\mathbf{r})}$$

- La funzione iconale L (<u>reale</u>) soddisfa l'equazione iconale, mentre il vettore (<u>generalmente complesso</u>) $\mathbf{E}_0$ soddisfa l'equazione di trasporto:

$$\left|\nabla L(\mathbf{r})\right| = n(\mathbf{r})$$ equazione iconale

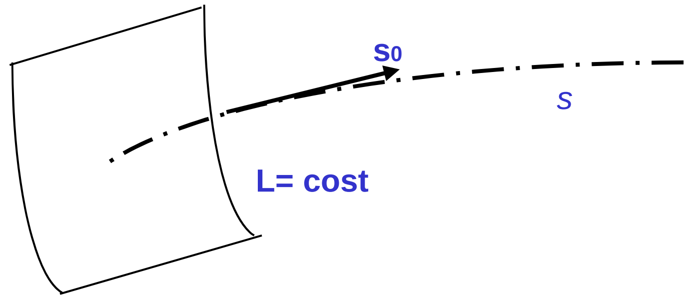
$$(\nabla L(\mathbf{r})\cdot\nabla)\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\nabla^2 L(\mathbf{r}) = 0$$ equazione del trasporto

- $L(\mathbf{r})$ è la funzione che adatta la costante di propagazione k_0 ad un mezzo con un certo indice di rifrazione n generalmente funzione di $\mathbf{r}$. In altre parole, L tiene conto del fatto che non necessariamente siamo nel vuoto.

- I vettori $\mathbf{E}_0$ e ∇L sono funzioni lentamente variabili di $\mathbf{r}$. Si noti che *l'ipotesi di lenta variabilità <u>non vale solo a frequenze ottiche</u>, ma anche a frequenze molto più basse (MHz) in* ***<u>mezzi naturali ad indice di rifrazione lentamente variabile</u>*** *come atmosfera terrestre e ionosfera*.

Superfici iconali e raggi ottici

- Nell'OG le superfici equifase coincidono con le superfici ad iconale costante e la propagazione delle onde avviene nella direzione del versore $\mathbf{s}_0$ normale alle superfici ad L=cost ed orientato nel verso crescente di L. Infatti si ha:



$$|\nabla L(\mathbf{r})| = n(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \nabla L(\mathbf{r}) = n\mathbf{s}_0$$

Il vettore di propagazione $\mathbf{k}$

è quindi espresso da:

$$\mathbf{k} = \nabla(k_0 L(\mathbf{r})) = k_0 \nabla L(\mathbf{r}) = k_0 n(\mathbf{r})\mathbf{s}_0$$

s rappresenta l'ascissa curvilinea delle normali alle superfici equifase,

di cui $\mathbf{s}_0$ ne denota il versore.

- La famiglia delle normali alla superficie equifase costituisce i RAGGI OTTICI o traiettorie ottiche.
- Iconali e raggi ottici costituiscono una congruenza normale analogamente al caso di superfici equipotenziali e linee di forza.
- Nell'approssimazione di ottica geometrica quindi i fenomeni propagativi sono interpretati in termini di raggi ottici e superfici iconali (superfici equifase o fronti d'onda).

Significato e.m. dell'ottica geometrica (1/3)

- Qualsiasi campo e quindi anche la soluzione dell'OG, deve soddisfare le equazioni di Maxwell. Scriviamo quindi le espressioni di **E** ed **H** per tale approssimazione:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\, e^{-jk_0 L(\mathbf{r})} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\, e^{-jk_0 L(\mathbf{r})} \end{cases}$$

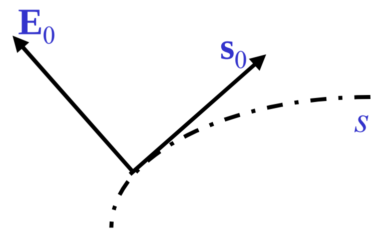
L'espressione del campo magnetico ha la stessa forma di quella di **E**

Consideriamo la divergenza del vettore $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{(in assenza di sorgenti)} \Rightarrow$$

$$\varepsilon \left[\mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{-jk_o L} + e^{-jk_o L} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 \right] + \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E}_0 e^{-jk_o L} =$$

$$\varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \left(-jk_0 \nabla L e^{-jk_0 L} \right) + e^{-jk_0 L} \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E}_0 e^{-jk_0 L} = 0$$



eliminando il termine comune esponenziale si ricava:

$$-jk_0 \varepsilon \mathbf{E}_0 \cdot \nabla L + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

Considerando la parte immaginaria e ricordando l'eq. iconale si ottiene:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s}_0 = 0$$

ovvero, il vettore $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ è ortogonale alla tangente al raggio.

Significato e.m. dell'ottica geometrica (2 / 3)

Esaminiamo ora il rotore di $\mathbf{E}$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H} \;\Rightarrow\; \nabla\times\mathbf{E}_0\, e^{-jk_0L}=-j\omega\mu\mathbf{H}_0\, e^{-jk_0L}$$

ricordando che $\nabla\times(a\mathbf{v})=\nabla a\times\mathbf{v}+a\nabla\times\mathbf{v}$, si ha:

$$-jk_0e^{-jk_0L}\nabla L\times\mathbf{E}_0+e^{-jk_0L}\nabla\times\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\mathbf{H}_0\, e^{-jk_0L} \quad (1)$$

Analizziamo la parte immaginaria di (1):

$$k_0\nabla L\times\mathbf{E}_0=\omega\mu\mathbf{H}_0 \quad\Rightarrow \mathbf{H}_0=\frac{k_0n}{\omega\mu}\underline{s}_0\times\mathbf{E}_0$$

Essendo: $\dfrac{k_0n}{\omega\mu}=\dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\mu}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}=\dfrac{1}{\eta}$, si ricava

$$\boxed{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})=\frac{1}{\eta}\mathbf{s}_0\times\mathbf{E}_0(\mathbf{r})}$$ come per le onde piane uniformi

Considerando la parte reale di (1) si ottiene:

$\nabla\times\mathbf{E}_0=0$ $\qquad$ $\mathbf{E}_0$ è irrotazionale

I risultati ottenuti hanno la seguente interpretazione:

OG significa considerare il campo ***localmente*** come un'onda piana uniforme (OPU) ovvero TEM rispetto al raggio ottico (punto per punto esso si propaga come una OPU anche se il percorso è generalmente curvilineo).

Significato e.m. dell'ottica geometrica (3/3)

Ragionando come nel caso precedente considerando l'equazione:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

si ottiene (come per le OPU):

$$\boxed{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \eta\, \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{s}_0}$$

Inoltre, sempre per analogia con le onde piane uniformi, possiamo vedere che, essendo il vettore di propagazione **k** espresso da:

$$\mathbf{k}\,(\mathbf{r}) = k_0 \nabla L(\mathbf{r}) = (\omega/c_0)\; n\; \mathbf{s}_0 \;,$$

la ***velocità di fase*** è data da:

$$c = \omega/k = \omega/k_0 n = c_0/n$$

Come nelle OPU, la velocità di fase è pari alla velocità della luce nel mezzo considerato.

Il ***vettore di Poynting*** è dato da:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = (1/2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) = (1/2\eta)|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2 \mathbf{s}_0$$

Le onde trasportano l'energia nella stessa direzione $\mathbf{s}_0$ in cui si propagano.

Teorema dell'uguale percorso ottico

Definiamo il **percorso ottico** $\delta(s)$ lungo un raggio tra 2 punti di ascissa s_1 e s_2:

$$\boxed{\delta(s) = \int_{s_1}^{s_2} n(s)\,ds}$$

nel caso in cui $n = 1$ il percorso ottico coincide con la congiungente tra s_1 e s_2. Poichè l'indice di rifrazione è:

$$n(s) = \frac{dL(s)}{ds}$$

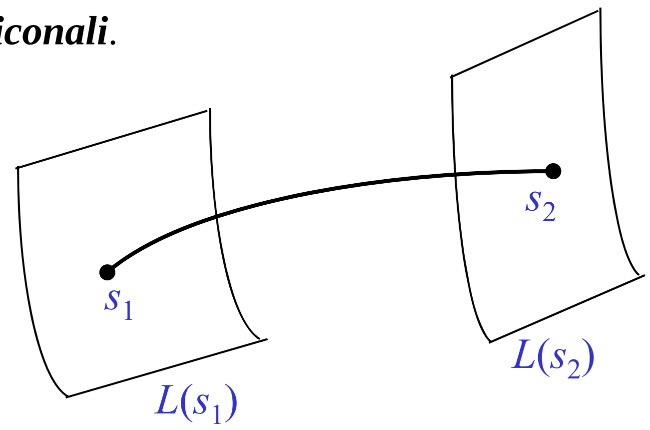
si ha:

$$\boxed{\delta(s) = \int_{s_1}^{s_2} n(s)\,ds = L(s_2) - L(s_1)}$$

Il percorso ottico è uguale per tutti i raggi ottici tra due iconali.

Una volta costruiti i raggi ottici o le superfici iconali, è possibile ricavare la fase tra due punti:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\int_{s_1}^{s_2} n(s)\,ds \Rightarrow L_2 = L_1 + \int_{s_1}^{s_2} n(s)\,ds = L_1 + \delta(s)$$



*Il teorema dell'uguale percorso ottico ci permette di determinare come varia la **<u>fase</u>** dell'onda lungo un raggio.*

Teorema del tubo di flusso (1/2)

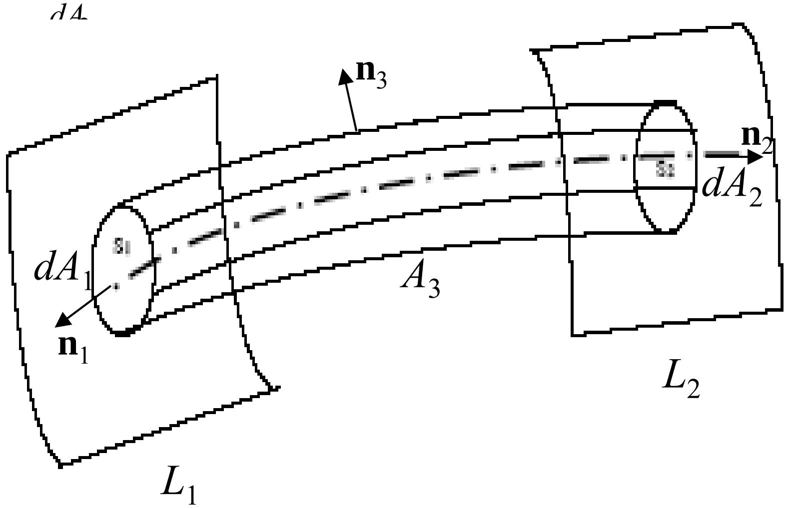
- Ci permette di determinare come l'andamento dell'ampiezza $E_0=|\mathbf{E}_0|$ del campo lungo la traiettoria del raggio ottico.
- Si costruisce un tubo di flusso per la potenza: superficie chiusa costituita lateralmente da una famiglia di raggi ed ortogonalmente da due porzioni di superficie iconale dA_1 e dA_2.
- Applicando il teorema di Poyinting ad un tubo di flusso di sezioni sufficientemente piccole da poter considerare su di esse $\mathbf{P}$ ≈costante su esse e supponendo mezzo privo di perdite ed assenza di sorgenti si ha:

$$\oint \mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}_0 dA=0 \Rightarrow \int_{dA_1}\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}_1 dA+\int_{A_3}\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}_3 dA+\int_{dA_2}\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}_2 dA=0\Rightarrow$$

$$(\mathbf{n}_2\equiv\mathbf{s}_0)\Rightarrow -P_1 dA_1+P_2 dA_2\Rightarrow P_1 dA_1=P_2 dA_2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\eta_1}\left|\mathbf{E}_0(s_1)\right|^2 dA_1=\frac{1}{2\eta_2}\left|\mathbf{E}_0(s_2)\right|^2 dA_2$$

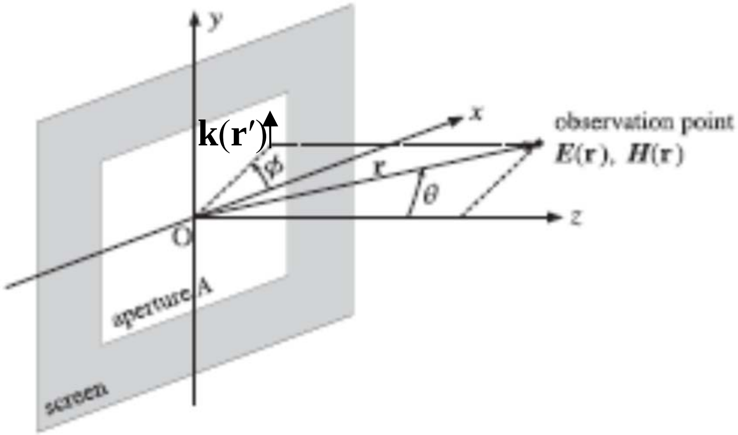
$$\Rightarrow \boxed{E_0(s_2)=E_0(s_1)\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}\sqrt{\frac{dA_1}{dA_2}}}$$



Teorema del tubo di flusso (2 / 2)

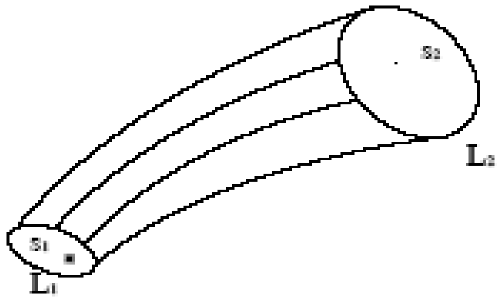
- L'ampiezza del campo in un punto del raggio ***è legata solo alla corrispondente ampiezza in un altro punto*** del raggio.
- La soluzione del campo è legata solo all'andamento dei raggi in un punto e ***non dipende dalla soluzione lungo i raggi adiacenti***. Questo è il *principio di località dell'OG*.
- La località dell'OG contraddice la **Teoria Elettromagnetica generale**, secondo la quale il campo nella regione al di là di una certa superficie equifase può essere visto come somma delle onde (elementari) prodotte da opportuni elementi di corrente elettrica e/o magnetica ciascuno dei quali produce un'onda sferica (**teorema di equivalenza)**:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{S'} \mathbf{k}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}S'$$

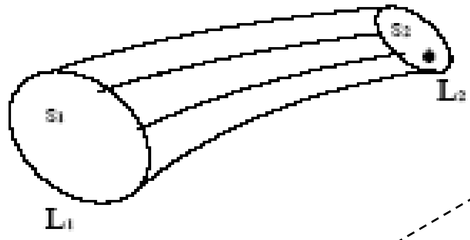


- Analogamente, viene a cadere il principio di Huygens-Fresnel secondo cui ogni fronte d'onda può essere ricavato da un fronte d'onda precedente come inviluppo di fronti d'onda sferici emessi dagli elementi di superficie in cui quest'ultimo può essere suddiviso.

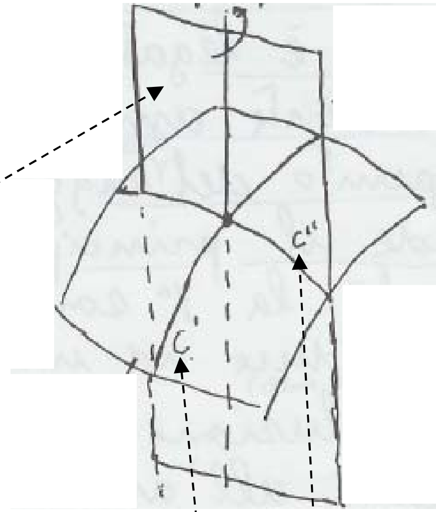
Fattore di divergenza



Fascio divergente $E_0(s_2) < E_0(s_1)$
potenza distribuita su una sup.
sempre più ampia



Fascio convergente
$E_0(s_2) > E_0(s_1)$



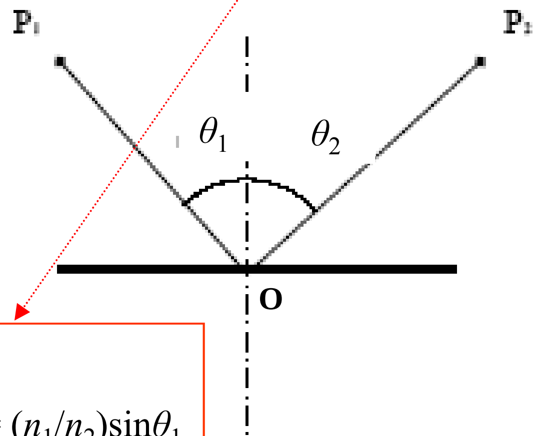
- Il rapporto $\sqrt{dA_1 / dA_2}$ è caratteristico delle superfici iconali coinvolte e si chiama *fattore di divergenza F_d.*
- Consideriamo un piano passante per la normale alla superficie iconale. Al ruotare del piano si forma una famiglia di curve intercette sull'iconale stessa. Dette c' e c'' le intercette con raggio di curvatura minimo e massimo, rispettivamente e indicati con ρ' e ρ'' tali raggi (detti *raggi principali*), si ha: $F_d(s) = \sqrt{dA_1 / dA_2} = \sqrt{\rho_1' \rho_1'' / \rho_2' \rho_2''}$
  L'inverso del prodotto dei raggi di curvatura minimo e massimo prende il nome di ***curvatura gaussiana*** e rappresenta la caratteristica geometrica dell'iconale.
- *Il calcolo dell'ampiezza lungo il raggio tramite il metodo del tubo di flusso è alternativo all'uso dell'eq. del trasporto (che permette però di determinare anche l'andamento della polarizzazione lungo il raggio).*

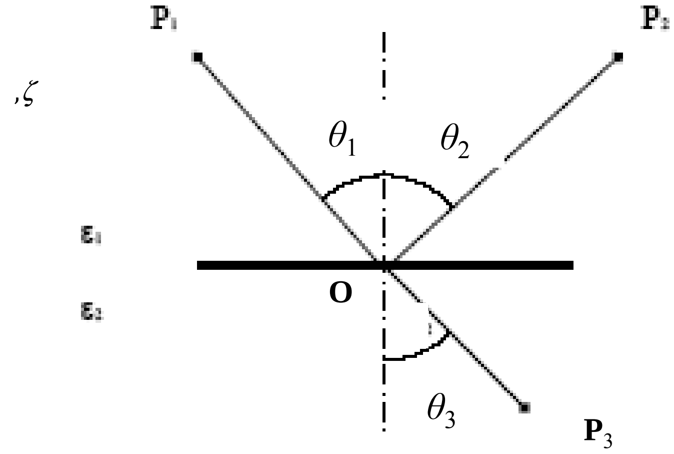
Principio di Fermat in ottica geometrica

- **Principio di Fermat**: considerati due punti nello spazio P_1 e P_2, il raggio ottico è la curva a cui i due punti appartengono che rende minimo il percorso ottico.
- Conseguenze per il caso di **mezzo omogeneo** (n = cost) :
  - I raggi ottici sono rette (la retta rende minima la distanza).
  - Per un raggio incidente su superficie piana, vale la **legge di Snell** di riflessione e rifrazione:

$\theta_2 = \theta_1$

$\sin\theta_3 = (n_1/n_2)\sin\theta_1$





Si può dimostrare che $\underline{OP}_1 + \underline{OP}_2$ è minimo per $\theta_1 = \theta_2$

Si può dimostrare che $\underline{OP}_1 + \underline{OP}_3$ è minimo per $\sin\theta_3 = (n_1/n_2)\sin\theta_1$

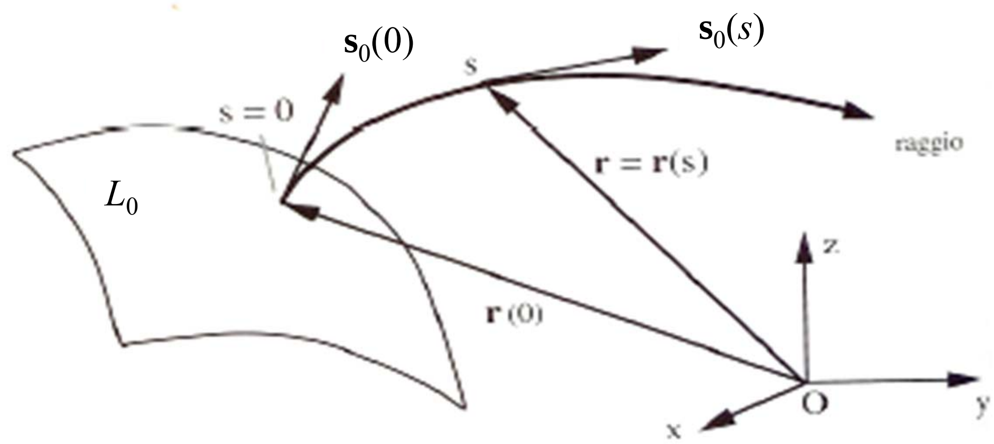
Riflessione e rifrazione dei raggi

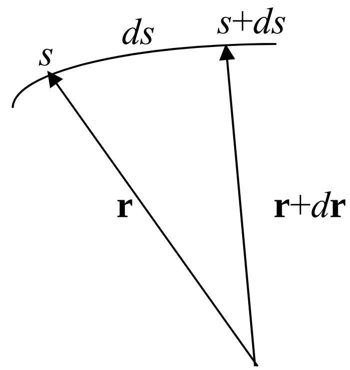
- L'OG può anche essere usata per studiare la riflessione la trasmissione di un'onda sulla superficie di un dielettrico (o anche la sola riflessione su un conduttore) a patto che la **curvatura della superficie riflettente sia >> di λ in modo da poter assimilare localmente la superficie ad un piano**.
- Per quanto visto a proposito dell'analogia con le OPU, appare lecito assumere che, localmente, un'onda incidente si rifletta e si trasmetta con le stesse modalità delle OPU. Ne segue che ad ogni raggio dell'onda incidente viene fatto corrispondere un raggio riflesso ed un raggio trasmesso **applicando localmente la legge di Snell** di riflessione e rifrazione.
- Ad un fascio di raggi incidenti si fa corrispondere un fascio di raggi riflessi ed un fascio di raggi trasmessi. Perché tale procedimento abbia senso è necessario che dopo riflessione e/o rifrazione una congruenza normale (iconali e raggi) si trasformi in un'altra congruenza normale. Si può dimostrare (***teorema di Malus***) che i fasci riflesso e trasmesso godono effettivamente di questa proprietà.
- L'OG non permette di determinare l'onda trasmessa in un conduttore poiché essa ***non vale necessariamente in mezzi dissipativi*** (L è reale). E' necessaria un'estensione della formulazione presentata.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Propagazione ottica

Equazione dei raggi





Sappiamo determinare come si propagano ampiezza e fase lungo un raggio (tubo di flusso ed ugual percorso ottico). Per studiare la propagazione di un'onda trattabile con l'OG dobbiamo però saper tracciare preliminarmente i raggi.

Su un generico raggio, consideriamo un'ascissa s, presa a partire dall'iconale L_0 e sia $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ la posizione del raggio all'ascissa s. Si ha:

$$d\mathbf{r} = ds\,\mathbf{s}_0$$

$$\text{Per l'eq. iconale: } \nabla L(s) = n\mathbf{s}_0 \Rightarrow \frac{d\nabla L(s)}{ds} = \nabla\frac{dL(s)}{ds} = \nabla n(s)$$

$$\text{Ma: } \frac{d\nabla L(s)}{ds} = \frac{d}{ds}[n(s)\mathbf{s}_0] = \frac{d}{ds}\left(n(s)\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla n(s) = \frac{d}{ds}\left(n(s)\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right) \quad \text{equazione dei raggi}}$$

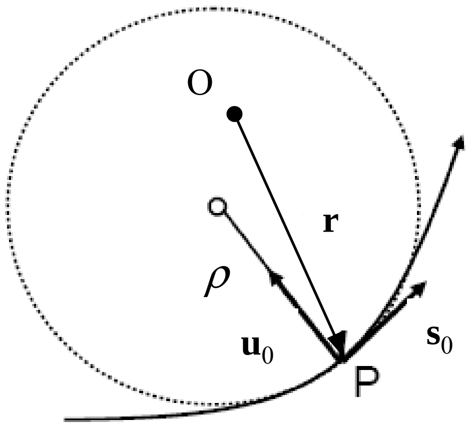
Tracciamento dei raggi ottici

- L'equazione dei raggi permette di determinare il raggio una volta assegnato il suo punto di partenza $\mathbf{r}(0)$ e la sua direzione iniziale $\mathbf{s}_0(0)$ (anche $\mathbf{s}_0$ è funzione di s).
- Indicando con $x=x(s)$, $y=y(s)$ e $z=z(s)$ le coordinate del punto $\mathbf{r}$ e proiettando l'eq. dei raggi sui 3 assi, si ottiene un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione è univocamente determinata essendo note le condizioni iniziali.
- Per n = cost., si ha $d^2\mathbf{r}/ds^2 = 0 \rightarrow \mathbf{r}(s)=\mathbf{A}s+\mathbf{B} \rightarrow$ è una retta [$\mathbf{A}=\mathbf{s}_0(0)$, $\mathbf{B}=\mathbf{r}(0)$].
- Se n è variabile i raggi si incurvano. Definiamo il vettore di curvatura come:

$$\boxed{\mathbf{u}(s) \equiv \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \frac{d\mathbf{s}_0}{ds}}$$

- Detto ρ il raggio di curvatura della traiettoria si può dimostrare che:

$\mathbf{u}(s)=|\mathbf{u}(s)|\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_0/\rho(s)$ $\quad$ $\mathbf{u}_0$: versore normale al raggio otti



- Il vettore $\mathbf{u}_0$ è perpendicolare in ogni punto al versore $\mathbf{s}_0$ e punta verso il centro del cerchio.

Curvatura dei raggi (1/2)

- Dall'equazione differenziale dei raggi e in base alle definizioni date si ha:

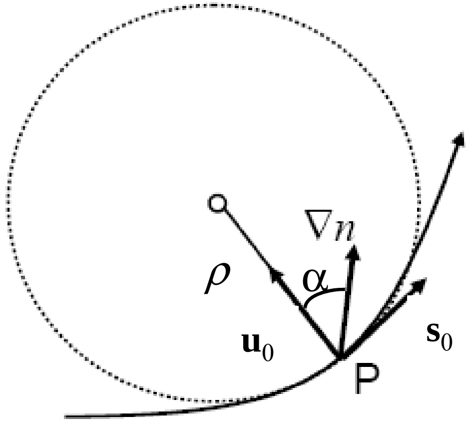
$$\nabla n(s) = \frac{d}{ds}\left(n(s)\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right) = \frac{dn(s)}{ds}\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} + n(s)\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \frac{dn(s)}{ds}\mathbf{s}_0 + n(s)\mathbf{u}(s)$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{u}_0$ si ricava:

$$\nabla n(s)\cdot\mathbf{u}_0 = n(s)\mathbf{u}(s)\cdot\mathbf{u}_0 = n(s)\left|\mathbf{u}(s)\right| = n(s)u(s) \Rightarrow$$

$$u(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \frac{\nabla n(s)}{n(s)}\cdot\mathbf{u}_0 = \nabla \ln n(s)\cdot\mathbf{u}_0 \approx \nabla n(s)\cdot\mathbf{u}_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho(s)} = \nabla n(s)\cdot\mathbf{u}_0}$$



- Poiché il primo membro è evidentemente positivo, detto α l'angolo tra la normale al raggio e la direzione di $\nabla n(s)$, se ne deduce che se α è minore di π/2:

$$\frac{1}{\rho(s)} = \nabla n(s)\ \cos\alpha$$

Curvatura dei raggi (2/2)

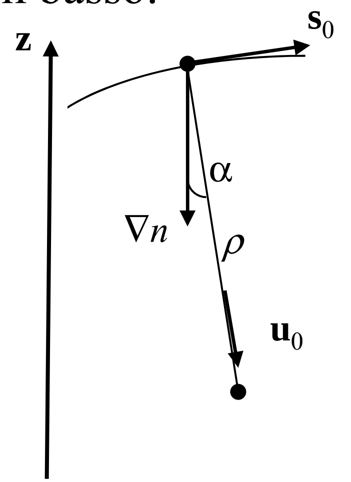
- Per *percorsi vicino al suolo* (collegamenti terrestri) si può considerare $\cos\alpha \approx 1$.
- Assumiamo un'***atmosfera stratificata verticalmnente***, tale cioè che n è funzione solo di una variabile ed in particolare della quota z. In tal caso n decresce all'aumentare di z e quindi ∇n è diretto verso il basso:

$$\nabla n\ (s) \approx -|\nabla n\ (z)|\ \mathbf{z}_0\ ;$$

Di conseguenza:

$$1/\rho(s) \approx -|\nabla n(z)|\ \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{u}_0\ ;$$

$$1/\rho\ (s) = -\ |\nabla\ n(z)|$$



- **Casi limite:**

  $n(z)$= cost $\rightarrow$ i raggi ottici sono rette (raggio di curvatura infinito)

  $\nabla n(z)$ = cost $\rightarrow$ i raggi ottici sono archi di circonferenza (raggio di curvatura costante)

Legge di Snell generalizzata (1/2)

- Il sistema di equazioni differenziali che si ottiene dall'equazione dei raggi è risolvibile, per un mezzo in cui n varia con legge arbitraria, solo per via numerica. L'equazione dei raggi è invece facilmente risolvibile nel caso di *atmosfera stratificata* ($n = n(z)$, $\nabla n \approx -|\nabla n|\,\mathbf{z}_0$).

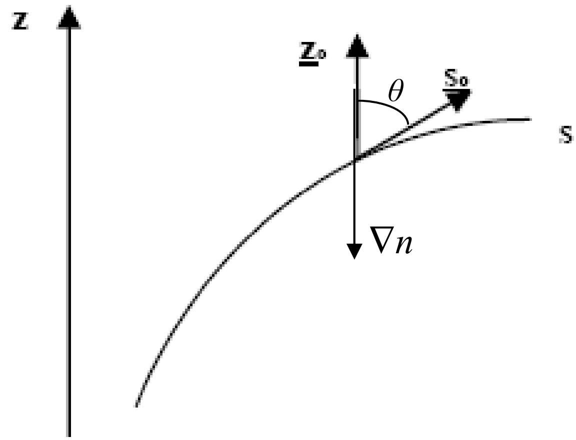
$$\mathbf{z}_0 \times \nabla n = 0 \Rightarrow \text{ per l'eq. dei raggi: } \mathbf{z}_0 \times \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \mathbf{z}_0 \times \frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds} = 0$$

$$\text{Essendo: } \frac{d}{ds}(\mathbf{z}_0 \times n\mathbf{s}_0) = \frac{d(\mathbf{z}_0)}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{z}_0 \times \frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds}, \text{ si ha:}$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{z}_0 \times n\mathbf{s}_0) - \underbrace{\frac{d(\mathbf{z}_0)}{ds} \times n\mathbf{s}_0}_{0} = 0 \Rightarrow$$

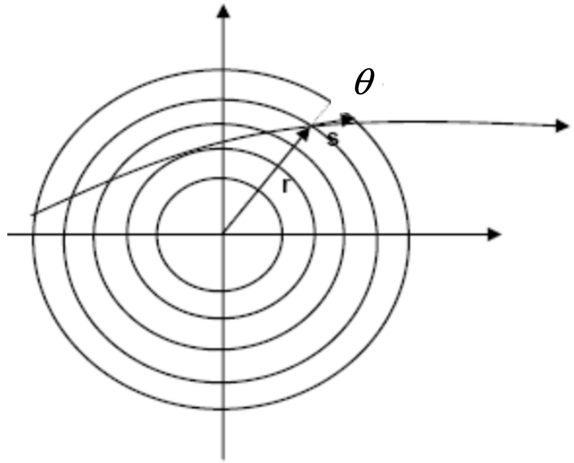
$\mathbf{z}_0 \times n\mathbf{s}_0 = \text{cost.}$ Indicando con θ l'angolo che il raggio forma con l'asse z, si può scrivere la legge di Snell generalizzata:

$$\boxed{n \sin\theta = \text{cost.}}$$



Legge di Snell generalizzata (2/2)

- Nel caso di mezzo a simmetria sferica si ha $n=n(\mathbf{r})$, per cui:



$$\nabla n = \frac{dn}{\mathrm{dr}}\mathbf{r}_0$$

Ne consegue che:

$$\mathbf{r}\times\nabla n = 0 \Rightarrow \text{per l'eq. dei raggi: } \mathbf{r}\times\frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds} = 0$$

$$\text{Essendo: } \frac{d}{ds}(\mathbf{r}\times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r}\times\frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds}\text{, si ha:}$$

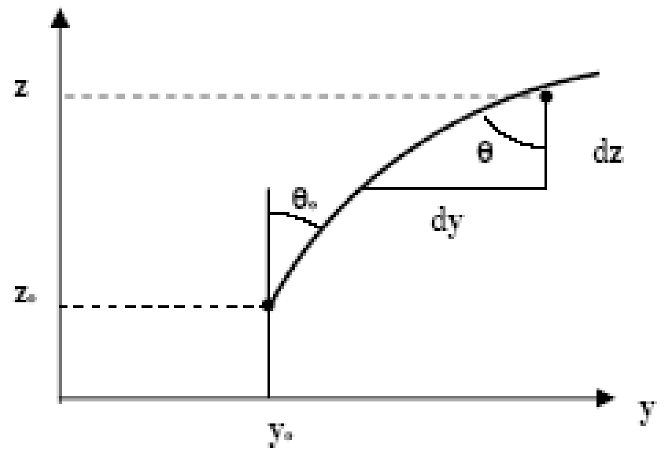
$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}\times n\mathbf{s}_0) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\times n\mathbf{s}_0\text{, ma } \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}_0 \Rightarrow$$

$\mathbf{r}\times n\mathbf{s}_0 = \text{cost.}$ Indicando con θ l'angolo che la traiettoria forma con $\mathbf{r}$, si può scrivere la legge di Snell generalizzata per mezzo a simmetria sferica: $\boxed{n\, r \sin\theta = \text{cost}}$

- Nel caso si debba considerare la sfericità della terra, *legge di Snell generalizzata* assume quindi la forma seguente: $(R_{\text{Terra}} + h)\, n \sin\theta = \text{cost}$ (h: quota della traiettoria, R_{Terra}: raggio terrestre). Tale relazione è alla base delle trattazioni di propagazione troposferica e ionosferica.

Raggi in un mezzo stratificato

- Per simmetria i raggi giacciono su piani paralleli all'asse *z*. Assumiamo quindi che il piano di giacenza sia *yz*, possiamo descrivere il raggio in forma $y = y(z)$.
- Osservando la figura si vede che si ha:



$$tg\,\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \Rightarrow y(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,dz'.$$

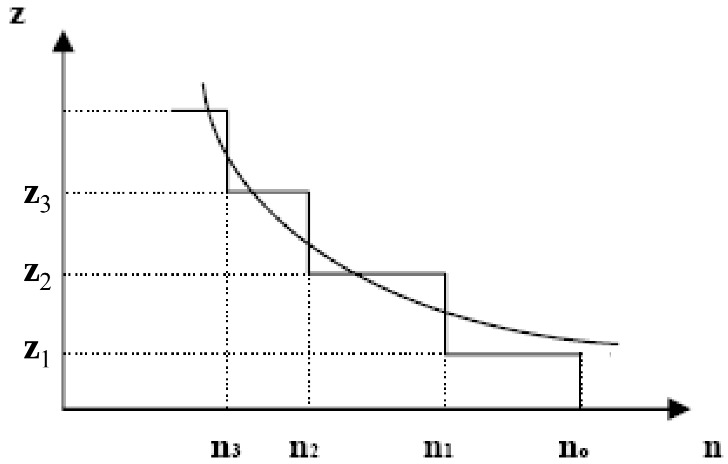
Assumiamo di sapere che il raggio passi con inclinazione θ_o per il punto (y_0, z_0) in cui $n(z) = n_0$ (p.es., caso di un trasmettitore con angolo di puntamento dell'antenna θ_o).

Per la **legge di Snell generalizzata** se $n_0 \sin\theta_o = C$, risulta $n\sin\theta = C$. Moltiplicando numeratore e denominatore dell'integrale per n si ottiene:

$$y(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{n\sin\theta}{\sqrt{n^2 - n^2\sin^2\theta}}\,dz' = \int_{z_0}^{z} \frac{C}{\sqrt{n^2(z') - C^2}}\,dz'$$

y(*z*) è l'equazione della traiettoria

Costruzione grafica approssimata per tracciare i raggi ottici: approssimazione a gradino



In *atmosfera stratificata*, generalmente l'indice di rifrazione diminuisce al crescere della quota e si assume una andamento esponenziale negativo. Si può approssimare **il profilo di *n* con una funzione a multi-gradini**. In tal modo si introducono delle discontinuità.

Osservando la figura a sx. si vede che alla quota z_1, n passa da valore n_0 al valore n_1, a z_2 n passa da n_1 a n_2, etc.

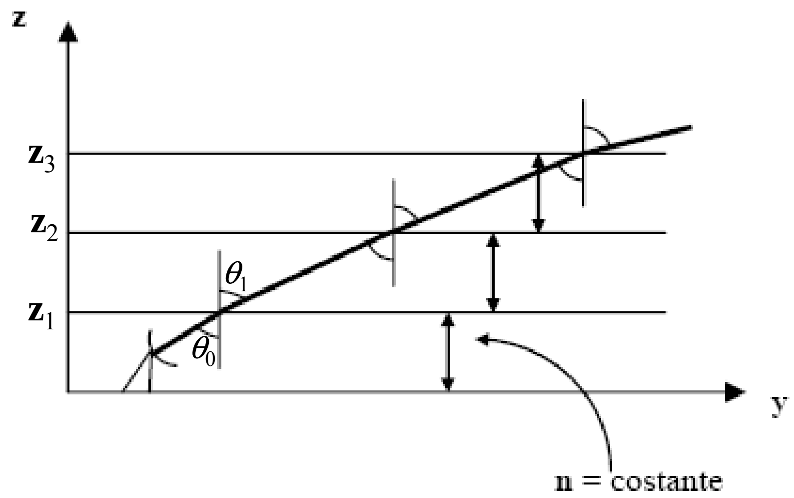
Nei tratti verticali n è costante → i raggi ottici sono rette. Dove c'è la discontinuità possiamo applicare la **legge di Snell generalizzata.**

Per la legge di Snell generalizzata:

$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$; $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$;   ……...

Dove n è costante i raggi ottici sono rette. Dove c'è la discontinuità varia l'angolo tra la traiettoria ottica e l'asse z secondo la legge di Snell generalizzata.

Le **condizioni iniziali** sono determinate dalla locazione del trasmettitore e dal puntamento dell'antenna.

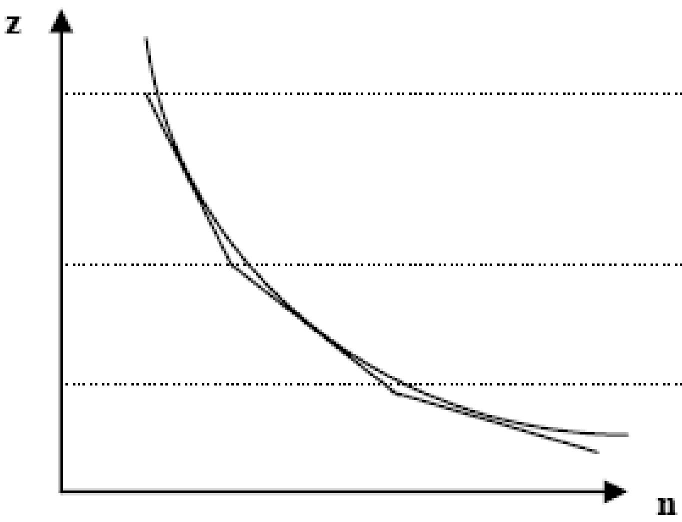


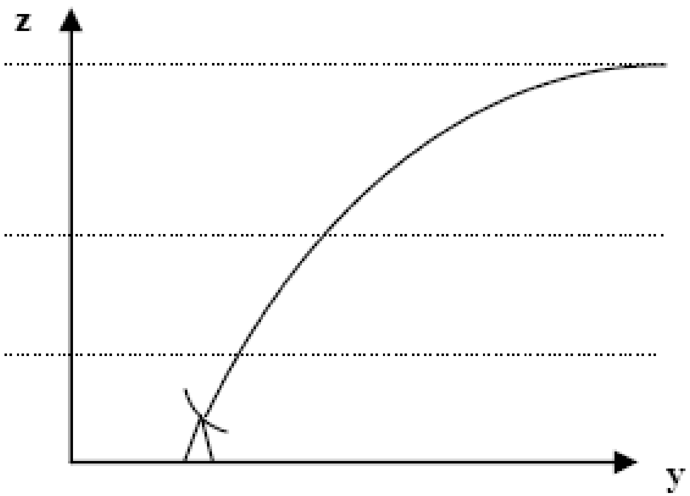
Costruzione grafica approssimata per tracciare i raggi ottici: approssimazione a spezzata

Per il profilo di n in atmosfera stratificata, si può anche considerare **un andamento di n(s) a spezzata**. Si assume che in ogni strato n abbia un andamento rettilineo e che la pendenza delle rette cambi in corrispondenza delle discontinuità.

In altre parole si assume che, in ogni strato in cui dividiamo l'atmosfera, il gradiente ∇n sia constante e che passando da uno strato all'altro ci sia discontinuità di tale gradiente, ma non di n.

Essendo ∇n = costante $\rightarrow$ i raggi ottici sono archi di circonferenza. Nel passaggio da uno strato all'altro non c'è discontinuità di n e quindi la tangente alla traiettoria è la medesima.





Soluzione dell'equazione del trasporto

- La propagazione del campo nell'approssimazione dell'OG in base all'equazione del trasporto si determina nel seguente modo:

$$(\nabla L(s)\cdot\nabla)\mathbf{E}_0(s)+\frac{1}{2}\mathbf{E}_0(s)\nabla^2 L(s)=0$$

$$\text{Dato che } \nabla L(s)\cdot\nabla = n(s)(\mathbf{s}_0\cdot\nabla)=n(s)\frac{d}{ds}, \text{ si ha :}$$

$$\frac{d\mathbf{E}_0(s)}{\mathbf{E}_0(s)}=-\frac{1}{2n(s)}\nabla^2 L(s)\,ds=0 \Rightarrow \mathbf{E}_0(s_2)=\mathbf{E}_0(s_1)e^{-\frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2 L(s)}{n(s)}ds}$$

- L'ampiezza del campo in un punto s del raggio, dipende solamente dall'ampiezza del campo in un altro punto del medesimo raggio. Tuttavia, il rapporto delle ampiezze del campo in due punti del raggio, dipende dall'andamento locale dei raggi circostanti anche se in lieve misura a causa della presenza nell'integrando di $\nabla^2 L$.
- La dipendenza di $\mathbf{E}_0$ con s è di tipo esponenziale. Nel caso di mezzo omogeneo l'esponenziale coincide col fattore di divergenza visto precedentemente:

$$F_d(s)=e^{-\frac{1}{2n}\int_0^s \nabla^2 L(s)ds}$$

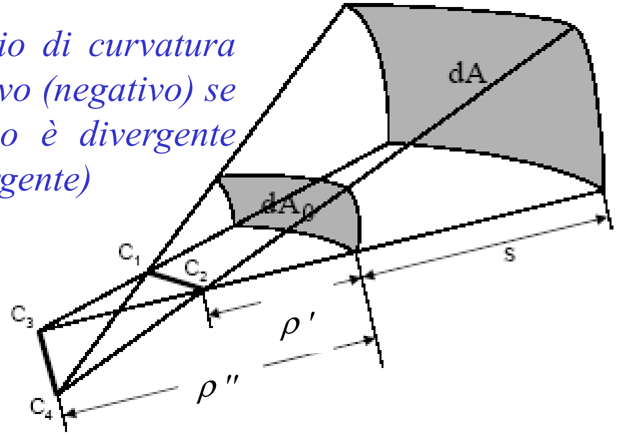
Fattore di divergenza per mezzi omogenei

- Se il mezzo è omogeneo, ossia se la propagazione avviene per raggi rettilinei, si può dimostrare che il fattore di divergenza è espresso da:

$$F_d(s) = \sqrt{\frac{\rho'\rho''}{(\rho'+s)(\rho''+s)}}$$

ρ', ρ'': raggi di curvatura principali

Il raggio di curvatura è positivo (negativo) se il fascio è divergente (convergente)



Per onda piana: $\rho'=\rho''=\infty \longrightarrow F_d=1$

Per onda sferica: $\rho'=\rho''=\rho_0 \longrightarrow F_d=\rho_0/(\rho_0+s)$

- Poiché si dimostra che in un mezzo omogeneo la polarizzazione non varia se ci si sposta lungo i raggi ed inoltre $L(s)-L(s=0)=ns$, si può ricavare un'*espressione per la propagazione del campo lungo un raggio*:

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{E}_0(s)e^{-jk_0L(s)} = \mathbf{E}_0(s)e^{-jk_0[\delta(s)+L(0)]} = [\mathbf{E}_0(0)F_d(s)]e^{-jk_0L(0)}e^{-jk_0\delta(s)}$$

$$= \mathbf{E}_0(0)e^{-jk_0L(0)}\sqrt{\frac{\rho'\rho''}{(\rho'+s)(\rho''+s)}}e^{-jk_0\tau(s)} = \mathbf{E}(0)\sqrt{\frac{\rho'\rho''}{(\rho'+s)(\rho''+s)}}e^{-jk\delta(s)}$$

con percorso ottico $\delta(s) = \int_0^s n(s)ds$

Limiti dell’ottica geometrica

- In generale l’OG dà risultati sufficientemente accurati ogni volta che le dimensioni degli oggetti investiti da un’onda EM è >> λ.
- OG non permette comunque di tener conto di fenomeni quali:
  - INTERFERENZA: sovrapposizione di onde tale che le caratteristiche di una singola onda sono alterate dalla presenza contemporanea delle altre.
  - DIFFRAZIONE: dovuta a limitazioni spaziali dei fronti d’onda che vanno dalla sorgente all’osservatore causate da ostacoli o da dimensioni finite (non >> λ) delle sorgenti => OG estesa mediante **GTD (Geometrical Theory of Diffraction)**

Esempio: formazione di zone d’ombra da parte di un oggetto opaco investito da un fascio di raggi ottici. Secondo l’OG il campo passa bruscamente a zero attraverso la superficie di transizione costituita dai raggi radenti al corpo. Nella realtà non è così.