



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Metodi di perturbazione e diffusione di Born

Mezzi aleatori

- Il mezzi in cui l'onda si propaga o con cui interagisce sono generalmente classificati come *deterministici* o *aleatori*.
- Molti mezzi naturali variano aleatoriamente nel tempo e nello spazio. Di conseguenza le onde in tali mezzi varieranno aleatoriamente in ampiezza e fase.
- I mezzi aleatori possono raggrupparsi in 3 categorie:
 - *Scatteratori (diffusori) aleatori*, ossia distribuzione aleatoria di diffusori discreti (esempi: pioggia, nebbie, aerosol).
 - *Mezzi aleatori continui* (indice di rifrazione n è funzione continua; es.: turbolenza atmosferica).
 - *Superfici rugose* ($\sigma_h > \lambda(8\cos\theta_i)$)
[θ_i angolo d'incidenza, σ_h dev. standard dell'altezza della superficie] .
- Nel caso di *mezzi continui* utilizzeremo:
 - *Metodo di Born*.
 - *Sviluppo di Lunenburg-Klein*.

Studio di mezzi continui: metodi di perturbazione

- Molti dei problemi che si presentano in pratica nello studio delle onde e.m. sono troppo complicati per essere risolti esattamente: *si utilizzano soluzioni approssimate*.
- L' ETR rappresenta un tipo di soluzione (approssimata) utilizzabile, ad esempio, per il problema della propagazione in mezzi con particelle diffondenti, ove effetti della polarizzazione delle onde e.m. e delle relazioni di fase possano considerarsi secondari rispetto allo studio del flusso di energia.
- Altri tipi di approssimazione, usati nel caso di mezzi disomogenei continui ($\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$) e detti metodi di perturbazione, si basano sull'uso dell'equazione delle onde che in tal caso si scrive (in assenza di cariche e sorgenti):

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2\nabla[\mathbf{E} \cdot \nabla \ln n(\mathbf{r})] = 0$$

Il 3° addendo è il *termine di depolarizzazione* che non permette di proiettare l'eq. delle onde sui 3 assi. Se l'indice di rifrazione $n(\mathbf{r})$ varia molto lentamente rispetto a λ , ossia l'andamento medio di n (componente stratificata) varia apprezzabilmente solo su distanze molto maggiori di λ , è possibile trascurare il termine di depolarizzazione.

Metodi di perturbazione

- Per una generica componente cartesiana di \mathbf{E} (detta k_0 la costante di propagazione nel vuoto) si può quindi scrivere:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2(\mathbf{r})E(\mathbf{r}) = 0$$

- Nei metodi di perturbazione, si parte da una soluzione nota dell'equazione (p.es quella per $n = 1$) e si cerca una soluzione per casi che si discostano di poco.
- Questi metodi si basano su sviluppi in serie di tipo asintotico e le perturbazioni che tratteremo saranno:
 - *Perturbazione del valore del parametro* in cui si conosce la soluzione per un valore assegnato di un parametro (ad esempio ϵ), e si cerca una soluzione (approssimata) per scostamenti di piccola entità dal valore del parametro per cui è nota la soluzione.
 - *Perturbazione della scala spaziale del parametro* in cui è nota la soluzione per una scala spaziale assegnata del parametro e si cerca una soluzione (approssimata) per un'alterazione di piccola entità della scala del parametro per la quale è nota la soluzione.



Metodo di Born (perturbazione di valore)

Perturbazione del valore del parametro: Metodo di Born

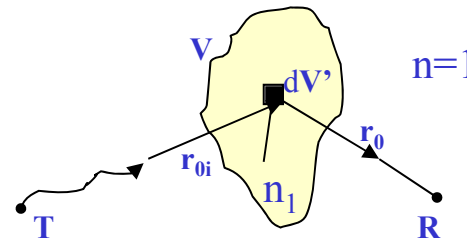
Consideriamo l'equazione delle onde nel caso scalare, ovvero per una componente del vettore \mathbf{E} :

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) = 0$$

Nel caso di $n=1$ sarebbe risolvibile. Allora se le variazioni del valore di n sono piccole, ossia se consideriamo un piccolo scostamento rispetto al valore unitario, possiamo utilizzare la soluzione nota per poi modificarla leggermente. Poniamo nel volume V :

$$n(\mathbf{r}) = 1 + n_1(\mathbf{r})$$

$$n_1(\mathbf{r}) = \zeta n_g(\mathbf{r})$$



n_1 rappresenta la perturbazione, ζ è un parametro indipendente da \mathbf{r} che modifica il valore di n ; n_g è una funzione di riferimento, il cui valore è arbitrario, che rappresenta l'andamento della perturbazione (prescinde dalla scala che è determinata da ζ).

Esprimiamo n^2 in funzione di ζn_g :

$$n^2 = 1 + \zeta^2 n_g^2 + 2\zeta n_g$$

e sostituiamo quest'ultima espressione nell'eq. delle onde:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 \zeta^2 n_g^2(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) + 2k_0^2 \zeta n_g(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) = 0$$

a questo punto la soluzione dipende oltre che da \mathbf{r} ,

anche da ζ . La variabilità del campo con ζ la possiamo

esprimere sviluppando E in serie di potenze di ζ intorno a $\zeta = 0$:

$$E(\mathbf{r}, \zeta) = E_0(\mathbf{r}, \zeta) + E_1(\mathbf{r}, \zeta) + E_2(\mathbf{r}, \zeta) + \dots = A_0(\mathbf{r}) + \zeta A_1(\mathbf{r}) + \zeta^2 A_2(\mathbf{r}) + \dots$$

la serie non è detto che converga sempre cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \neq 0$$

R_n rappresenta il resto della serie all'ennesimo termine.

Questo tipo di serie viene detto serie asintotica ed ha la seguente proprietà:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \zeta \rightarrow 0}} R_n \rightarrow 0$$

per cui l'uniformità della convergenza non è assicurata.

Può succedere che in certi punti ci sia convergenza per ζ non troppo piccolo, mentre in altri punti c'è convergenza solo per ζ piccolissimo.

Per ricavare i coefficienti A_0, A_1, A_2, \dots , si inserisce lo sviluppo nell'equazione delle onde:

$$\nabla^2 A_0 + k_o^2 A_0 + k_o^2 \zeta^2 n_g^2 A_0 + 2 k_o^2 \zeta n_g A_0 + \zeta \nabla^2 A_1 + \zeta k_o^2 A_1 + k_o^2 \zeta^3 n_g^2 A_1 + 2 k_o^2 \zeta^2 n_g A_1 + \dots = 0$$

Successivamente si raccolgono i termini con ζ^0, ζ^1, \dots :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 A_0 + k_o^2 A_0 = 0 \quad (\zeta^0) \\ \nabla^2 A_1 + k_o^2 A_1 = -2k_o^2 n_g A_0 \quad (\zeta^1) \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

risolvendo la prima equazione si ricava il termine A_0 che sostituito nella seconda consente di ricavare A_1 etc.

I coefficienti $A_0, \zeta A_1, \zeta^2 A_2, \dots$, rappresentano rispettivamente: E_0, E_1, E_2, \dots per cui, moltiplicando la seconda equazione per ζ si ha :

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_0 + k_o^2 E_0 = 0 \\ \nabla^2 E_1 + k_o^2 E_1 = -2k_o^2 n_1 E_0 \end{array} \right.$	<p>Equazione imperturbata</p> <p>Equazione del 1° ordine di perturbazione</p>
---	---

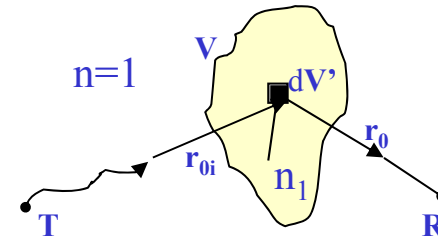
Soluzione di Born

- L'equazione del 1° ordine, la cui soluzione è detta **SOLUZIONE DI BORN**, contiene, come termine di sorgente, la soluzione di ordine zero (imperturbata).
- Le soluzioni di ordine superiore sono di tipo iterativo: per l'ordine 2 avremo come termine di sorgente la soluzione del primo ordine.
- $n_1 E_0$ agisce come termine di sorgente elettrica, ciò implica che la soluzione di Born può ottenersi con il metodo della funzione di Green:

$$E_1(\mathbf{r}) = 2k_0^2 \int_V n_1(\mathbf{r}') E_0(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$$

V è il volume dove $n_1 \neq 0$

Termine di sorgente

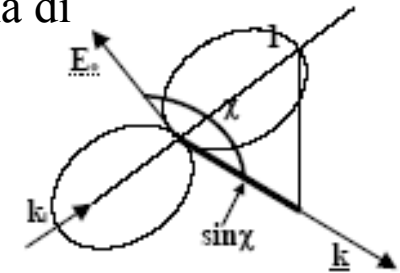


Poiché in atmosfera le variazioni che n subisce sono piccole rispetto al valor medio, la soluzione di ordine 1 è sufficiente

Soluzione di Born in zona di Fraunhofer (1/2)

L'estensione al *caso vettoriale* della soluzione di Born conduce, in zona di Fraunhofer, alla seguente espressione per il campo al 1° ordine:

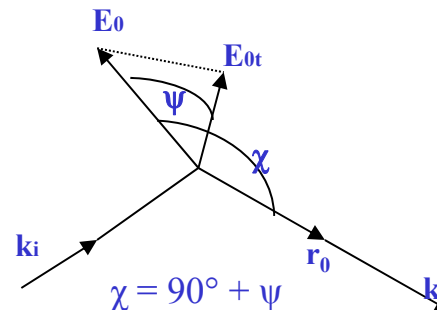
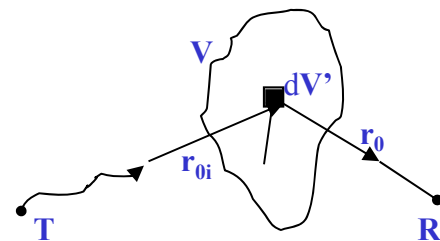
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2k_0^2 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_V n_1(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{0t} e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} dV'$$



\mathbf{E}_{0t} è la componente di \mathbf{E}_0 , ossia del campo incidente sul volume V' dove $n=n(\mathbf{r})$, trasversa alla direzione di osservazione \mathbf{r} e $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{r}_0$.

Poniamo inoltre $\mathbf{k}_i = k_0 \mathbf{r}_{0i}$ dove \mathbf{r}_{0i} è il versore rappresentante la direzione in cui si propaga il campo incidente \mathbf{E}_0 verso il volume V' .

Indichiamo con χ l'angolo compreso tra la direzione di \mathbf{E}_0 (denotata dal versore di polarizzazione \mathbf{e}_0) e la direzione di osservazione \mathbf{r}_0 , con ψ l'angolo compreso tra la componente trasversa di \mathbf{E}_0 ed \mathbf{e}_0 . Si noti che \mathbf{e}_0 e \mathbf{r}_{0i} sono ortogonali se V' è a grande distanza dal trasmettitore.



$$|\mathbf{E}_{0t}| = |\mathbf{E}_0| \cos \psi = |\mathbf{E}_0| \cos(\chi - 90^\circ) = |\mathbf{E}_0| \sin \chi$$

Soluzione di Born in zona di Fraunhofer (2/2)

- Osservando le figure precedenti si vede che $|\mathbf{E}_{0t}| = |\mathbf{E}_0| \sin \chi$. Ne consegue che ciascun elemento dV' del volume contenente le irregolarità di n , irradia come un dipolo (a causa della presenza di $\sin \chi$). L'onda incidente produce quindi un dipolo equivalente nel mezzo aleatorio.
- Se si suppone che il campo imperturbato \mathbf{E}_0 sia un'onda piana uniforme (trasmettitore a grande distanza da V'), l'ampiezza del campo soluzione di Born assume la seguente forma:

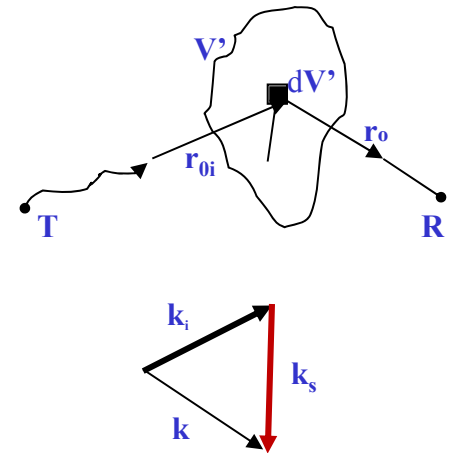
$$E_1(\mathbf{r}) = 2k_0^2 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \chi |E_0| \int_V n_1(\mathbf{r}') e^{j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}'} dV'$$

dove si è posto :

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0 |\mathbf{E}_0| e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'}, \quad \mathbf{E}_{0t} = \mathbf{e}_0 |\mathbf{E}_0| \sin \chi e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'}$$

e dove, considerando il volume V' piccolo, si è supposto che χ non vari apprezzabilmente e lo si è portato fuori dall'integrale.

Il vettore $\mathbf{k}_s(\theta_s, \varphi_s) = \mathbf{k}(\theta, \varphi) - \mathbf{k}_i(\theta_i, \varphi_i)$ rappresenta il vettore di diffusione dipendente dagli angoli di diffusione (θ_s, φ_s)



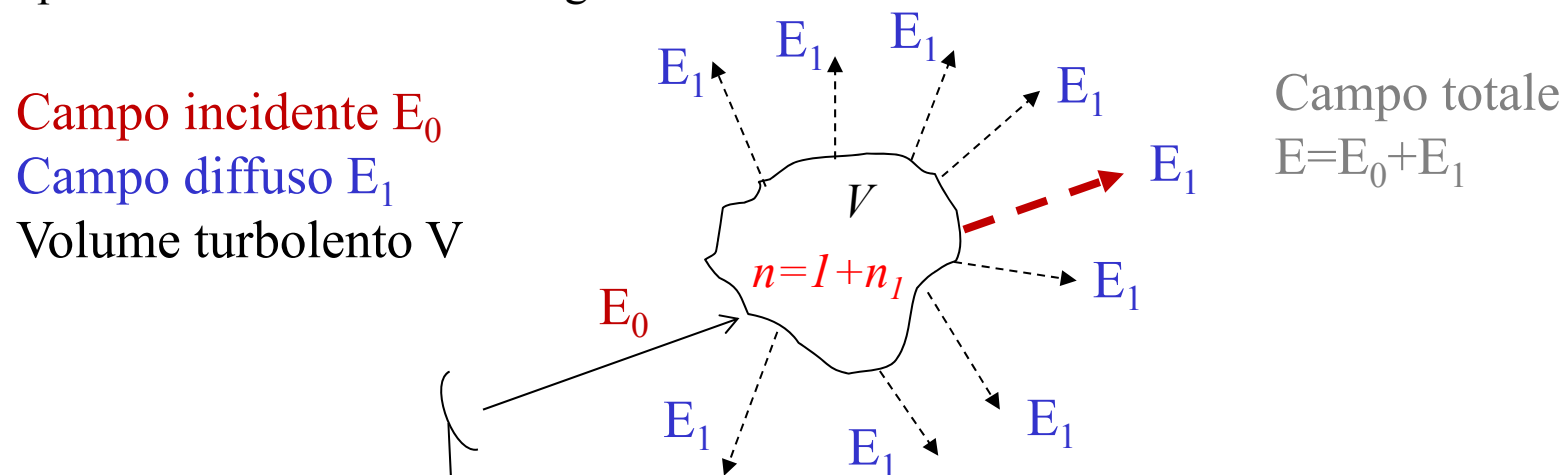
Applicazione a mezzi turbolenti

- Consideriamo un'onda che incide su un volume di atmosfera (tra 3 e 8 Km di altezza) in cui l'indice di rifrazione fluttua in modo aleatorio. Le fluttuazioni aleatorie sono *fluttuazioni su piccola scala*:

$$n = \langle n \rangle + n_1$$

$$n_1 \ll \langle n \rangle; \langle n_1 \rangle = 0$$

- Le fluttuazioni sono dovute p.es. a turbolenze causate da rimescolamenti di masse d'aria di caratteristiche diverse.
- Il termine n_1 (moltiplicato per il campo incidente) funge da termine di sorgente equivalente (come un'antenna trasmittente) che irradia nelle varie direzioni con una direttività come quella del dipolo elementare e che può permettere di stabilire collegamenti tra terminali non in visibilità.



Campi coerenti ed incoerenti

- Consideriamo un'onda e.m. sinusoidale che attraversa un mezzo aleatorio. Ampiezza e fase fluttuano in modo aleatorio, per cui il fasore corrispondente è una funzione aleatoria di punto. Indicando genericamente con $f(\mathbf{r})$ tale funzione si ha:

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) + E_1(\mathbf{r}) \Rightarrow f(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r}) \rangle + \tilde{f}(\mathbf{r})$$

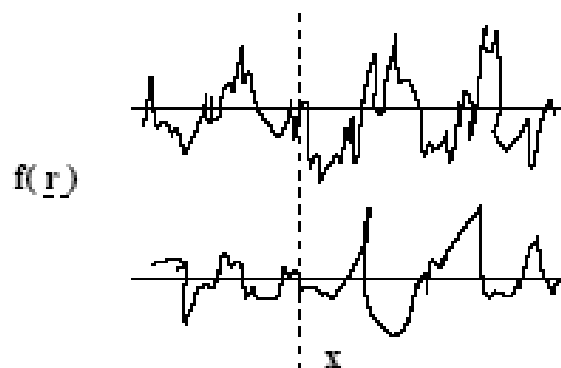
$$\text{dove } \langle \tilde{f}(\mathbf{r}) \rangle = 0$$

Si noti che $\langle f(\mathbf{r}) \rangle$ costituisce la componente coerente del campo, mentre la parte fluttuante $\tilde{f}(\mathbf{r})$ è la componente incoerente (col campo incidente)

- La parte coerente varia con \mathbf{r} molto più lentamente della componente incoerente.
- Nel caso dei collegamenti tropodiffusione il campo all'antenna ricevente è totalmente incoerente (essendo originato da fluttuazioni di n).
- I campi che attraversano mezzi aleatori sono descritti per mezzo di *parametri statistici* (*campi statistici*), quali $\langle |f(\mathbf{r})|^2 \rangle$ da cui si può dedurre (dividendo per 2η) l'intensità del vettore di Poynting (densità di potenza).

Parametri statistici (1/2)

- La funzione $f(\mathbf{r})$ rappresenta quindi un processo stocastico (nel dominio spaziale \mathbf{r}). Di tale processo avremo un numero N di realizzazioni: f_1, f_2, \dots, f_N .



2 realizzazioni del processo stocastico
 $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ viste lungo l'asse x

- Fissato un punto \mathbf{r}_1 , si estrae una *variabile aleatoria* le cui determinazioni sono i valori assunti dalle singole realizzazioni di $f(\mathbf{r})$ per $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.
- Alla variabile aleatoria $f(\mathbf{r}_1)$ competerà la densità di probabilità pdf $p[f(\mathbf{r}_1)]$. Se il processo è stazionario (*spazialmente*), il valor atteso è indipendente da \mathbf{r} e l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.
- Il valor atteso è quindi dato da:

$$\langle f(\mathbf{r}_1) \rangle = \int f(\mathbf{r}_1) p[f(\mathbf{r}_1)] df(\mathbf{r}_1) = \langle f \rangle$$

Parametri statistici (2/2)

- Consideriamo variabili centrate (o a valor atteso nullo) e quindi solo la componente fluttuante. La varianza è data da:

$$\sigma_f^2 = \langle \tilde{f}(\mathbf{r}_1) \tilde{f}^*(\mathbf{r}_1) \rangle = \int |\tilde{f}(\mathbf{r}_1)|^2 p[\tilde{f}(\mathbf{r}_1)] d\tilde{f}(\mathbf{r}_1)$$

- Sempre per variabili centrate, la covarianza è funzione solo di $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (ed è proporzionale alla funzione di autocorrelazione ACF) e la sua trasformata FFT è la densità spettrale di potenza Φ :

$$C_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{f}(\mathbf{r}_1) \tilde{f}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \iint \tilde{f}(\mathbf{r}_1) \tilde{f}^*(\mathbf{r}_2) p[\tilde{f}(\mathbf{r}_1) \tilde{f}(\mathbf{r}_2), \boldsymbol{\rho}] d\tilde{f}(\mathbf{r}_1) d\tilde{f}(\mathbf{r}_2)$$

$$C_f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = C_f(\boldsymbol{\rho}) = \text{ACF}(\boldsymbol{\rho}) |\tilde{f}(\mathbf{r}_1)| |\tilde{f}(\mathbf{r}_2)|$$

$$\Phi(\mathbf{k}) = \mathfrak{F}[C_f(\boldsymbol{\rho})] = \text{FFT}[C_f(\boldsymbol{\rho})]$$

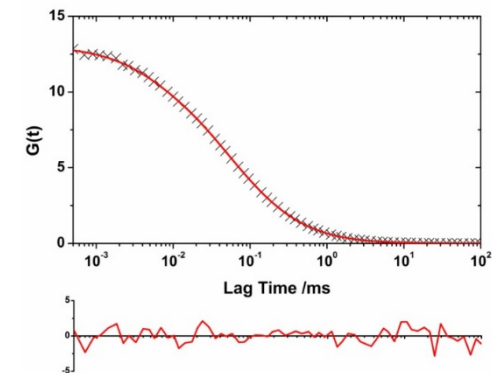
- Infine:

$$\sigma_f^2 = C_f(\boldsymbol{\rho} = 0) = \langle \tilde{f}(\mathbf{r}_1) \tilde{f}^*(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle |\tilde{f}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$$

$$\tilde{P} = (1/2\eta) \langle |\tilde{f}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle = (1/2\eta) \sigma_f^2$$

$$P = \langle P \rangle + \tilde{P} = (1/2\eta) \langle |f(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle + (1/2\eta) \langle |\tilde{f}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle$$

Esempio di autocorrelazione nel tempo



Si noti che, essendo la brillantezza specifica una distribuzione spettrale (oltre che angolare) di densità di potenza, si può dare una definizione di brillantezza specifica in funzione della DSP di un campo naturale (*definizione statistica di brillantezza*).



Diffusione di Born da volumi turbolenti

Intensità del vettore di Poynting

Supponiamo il campo e.m. aleatorio. Ponendo $\mathbf{k}_s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_i$, si ricava :

$$E_1(\mathbf{r}) = 2k_0^2 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \chi |E_0| \int_V n_1(\mathbf{r}') e^{j\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'} dV' \equiv \tilde{f}(\mathbf{r})$$

L'intensità del vettore di Poynting a grande distanza dal volume V' è data da :

$$\tilde{P}_R(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\eta} |E_1(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2\eta} |\tilde{f}(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{2\eta} \tilde{f}(\mathbf{r}) \tilde{f}^*(\mathbf{r}) \quad (\eta \text{ impedenza caratteristica del mezzo})$$

Essendo l'espressione del campo stocastico (*perturbato* di Born) E_1 data da un integrale, per il calcolo del modulo al quadrato possiamo utilizzare il prodotto complesso coniugato e un integrale doppio con 2 variabili fittizie \mathbf{r}_1' e \mathbf{r}_2'

$$\tilde{P}_R(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\eta} 4k_0^4 \frac{\sin^2 \chi}{(4\pi)^2 r^2} |E_0|^2 \iint_{V_1 V_2} n_1(\mathbf{r}_1') n_1(\mathbf{r}_2') e^{j\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')} dV_1' dV_2'$$

Si noti che, rappresentando uno scostamento dall'unità, n_1 è reale.

Irregolarità definite statisticamente

Generalmente di $n_1(\mathbf{r})$ non si può fornire un'espressione analitica, ma la si può considerare una variabile aleatoria definita statisticamente a causa, per esempio, di *turbolenze atmosferiche*. Per l'intensità del vettore di Poynting totale P_R si dovrà quindi considerare la statistica del 2° ordine (varianza) di E_1 :

$$P_R(\mathbf{r}) = \langle P_R(\mathbf{r}) \rangle + \tilde{P}_R(\mathbf{r}) = \langle P_R(\mathbf{r}) \rangle + \frac{1}{2\eta} \langle |E_1(\mathbf{r})|^2 \rangle = \frac{1}{2\eta} \langle |E_0(\mathbf{r})|^2 \rangle + \frac{1}{2\eta} \langle |E_1(\mathbf{r})|^2 \rangle$$

Introduciamo l'intensità del vettore di Poynting del campo imperturbato: $P_i = \frac{1}{2\eta} |E_0|^2$

Definiamo inoltre la covarianza di n_1 espressa da: $C_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle n_1(\mathbf{r}_1) n_1(\mathbf{r}_2) \rangle$

Assumendo che il processo sia ergodico (o stazionario in senso lato) e ponendo $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, si ha che $C_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_n(\mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_2) = C_n(\boldsymbol{\rho})$ e si ricava per il campo diffuso:

$$\tilde{P}_R(\mathbf{r}) = P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} \int_{V_1} \int_{V_\rho} C_n(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} dV_1' dV_\rho'$$

poichè $C_n(\boldsymbol{\rho})$ è funzione limitata di ρ si ha per la densità di potenza incoerente:

$$\tilde{P}_R(\mathbf{r}) = P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} V \int_{-\infty}^{+\infty} C_n(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} dV_\rho'$$

Densità spettrale di potenza delle irregolarità

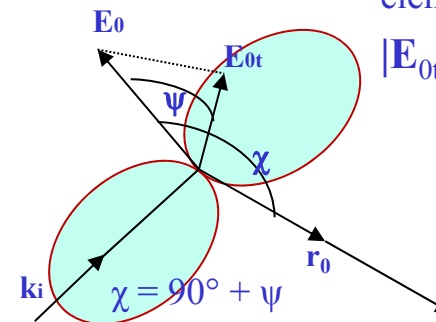
Nell'ipotesi di *fluttuazioni di n* come processo aleatorio ergordico, definiamo la densità spettrale di potenza (DSP) delle irregolarità di *n* calcolata per la frequenza spaziale $\mathbf{k}_s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_i$ in base al teorema di Wiener - Kintchine :

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_n(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} dV_{\rho}' = \Phi_n(\mathbf{k}_s)$$

Si può esprimere P_R in funzione della DSP $\Phi_n(\mathbf{k}_s)$:

$$\tilde{P}_R = P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} V' \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} dV_{\rho}' \Rightarrow$$

$$\tilde{P}_R = P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} V' \Phi_n(\mathbf{k}_s)$$



La densità di potenza diffusa è descritta da una diagramma di reirradazione a toroide simile a quello di un dipolo elementare

$$|\mathbf{E}_{0t}| = |\mathbf{E}_0| \sin \chi$$

Lo spettro Φ_n descrive in pratica l'aleatorietà dell'indice di rifrazione *n* con vettore di diffusione \mathbf{k}_s (pulsazioni o frequenze spaziali) dato da:

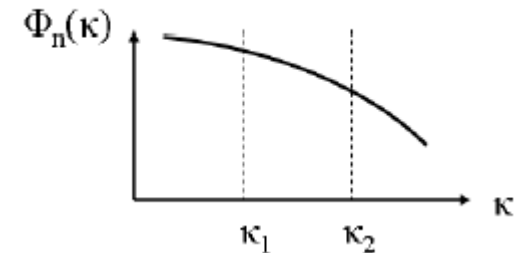
$$\mathbf{k}_s = k \cos \theta_s \mathbf{z}_0 + k \sin \theta_s \cos \theta_s \mathbf{x}_0 + k \sin \theta_s \sin \theta_s \mathbf{y}_0$$

Spettro di Kolmogorov e formula di Booker-Gordon

- La densità di potenza incidente sull'antenna ricevente può essere determinata tramite la formula di Born. Per la DSP si può considerare lo **spettro di Kolmogorov** della turbolenza:

$$\Phi(k_s) = (32\pi^3)(3.3 \cdot 10^{-2} C_n^2) k_s^{-11/3}$$

C_n^2 è detta **costante di struttura**. Una formula per l'andamento di C_n in funzione della altezza z sulla superficie terrestre è: $C_n^2 = 4.2 \cdot 10^{-14} z^{-1/3} e^{-z/3200}$ [m^{-2/3}]



Il contributo principale alle fluttuazioni di n è dovuto alla zona (intervallo inerziale) tra k_{s1} e k_{s2}

- In alternativa si può usare la **formula di Booker-Gordon** per la covarianza $C_n(\rho)$

$$C_n(\rho) = \langle n_1^2 \rangle \exp(-\rho/l_c) \text{ [m}^{-1/3}\text{]}$$

l_c è detta lunghezza di correlazione poichè a tale distanza C_n diminuisce di $1/e$ rispetto al valore che ha in $\rho = 0$ e quindi indica la distanza entro la quale il mezzo ha ancora una certa correlazione. E' detta anche **scala di turbolenza**.

Si noti che nello spettro di Kolmogorov si assume che Φ sia funzione solo dell'ampiezza k_s del vettore \mathbf{k} . Analogamente nella formula di Booker-Gordon si assume che C_n sia funzione dell'ampiezza ρ di ρ .

Volume comune in tropodiffusione

Nel caso di antenne a fascio stretto, assunto gaussiano, con larghezze a 3dB: θ_1, φ_1 e θ_2, φ_2 rispettivamente per le antenne di trasmissione e di ricezione, il volume comune V_c approssimato con un parallelepipedo è:

$$V_c = 1.206 \frac{r_1^2 r_2^2 \theta_1 \varphi_1 \theta_2 \varphi_2}{\sqrt{r_1^2 \varphi_1^2 + r_2^2 \varphi_2^2}} \frac{1}{\sin \beta}$$

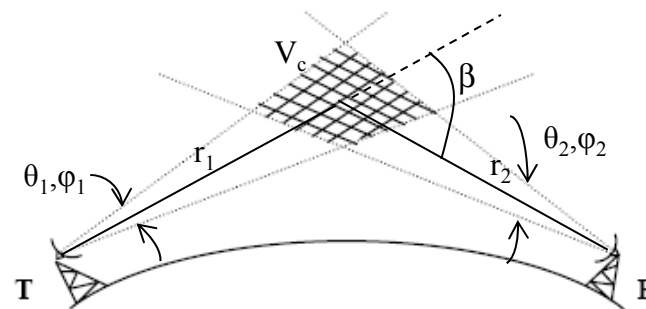
β angolo compreso tra le direzioni d'incidenza e di osservazione, ossia tra \mathbf{r}_{0i} ed \mathbf{r}_0 .

Si ha: $k_s = 2k_0 \sin(\beta/2)$

Fascio gaussiano: $G(\theta, \varphi) = G_0 \exp\{-(\ln 2)[(2\theta/\theta_1)^2 + (2\varphi/\varphi_1)^2]\}$

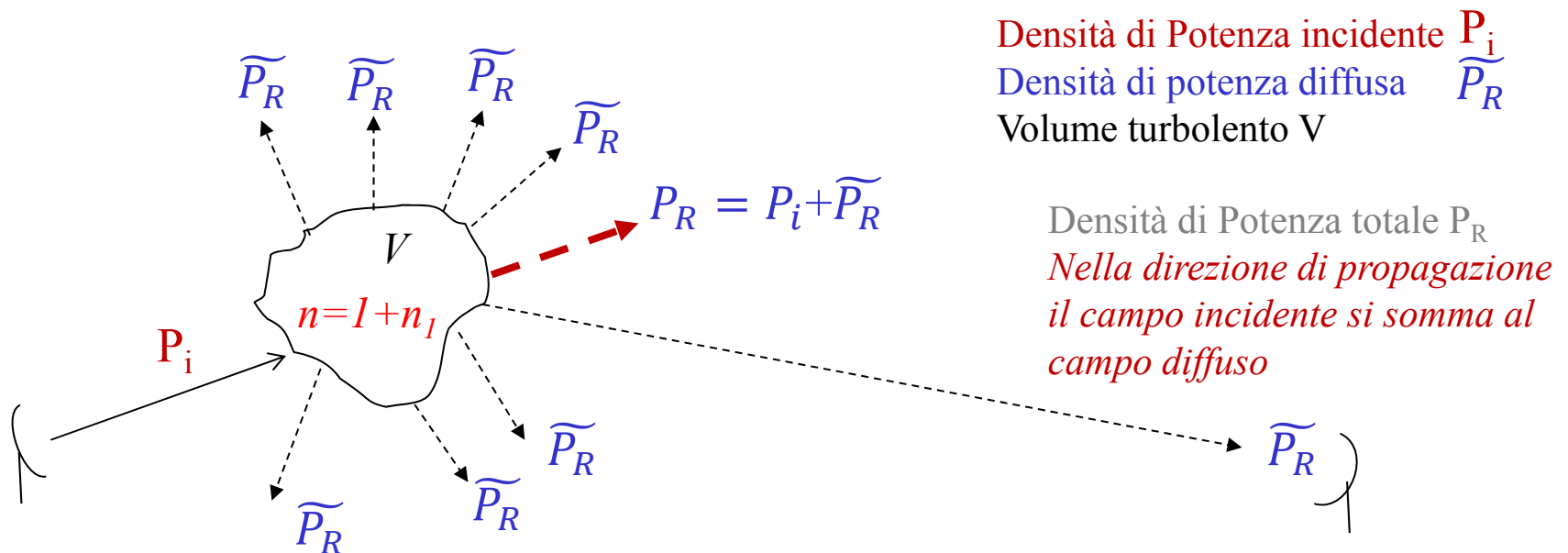
θ_1 e φ_1 sono le ampiezze dei lobi a metà potenza (HPBW) dell'antenna TX nei piani verticale e orizzontale, rispettivamente.

θ_2 e φ_2 sono gli analoghi per l'antenna RX



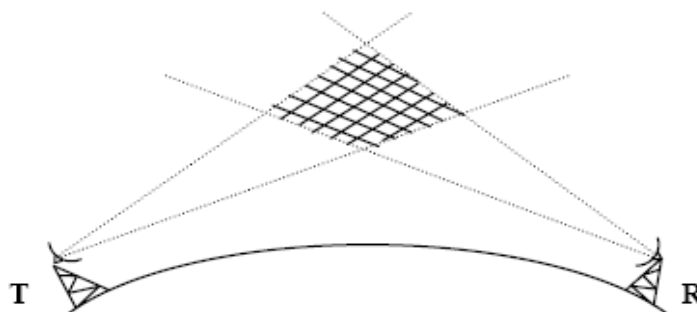
Tropodiffusione

- Si è visto che, in pratica, le disomogeneità atmosferiche agiscono da diffusori, irradiando in direzioni diverse da quella di incidenza una piccola frazione della potenza incidente. In questo modo si possono realizzare dei collegamenti detti “collegamenti per tropodiffusione” o “per diffusione troposferica” ovvero interferenze per diffusione troposferica.
- Consideriamo una situazione in cui **trasmettitore e ricevitore NON sono in visibilità**. Il collegamento è ancora possibile grazie all’aleatorietà dell’indice di rifrazione n dovuto alle turbolenze atmosferiche in un volume comune ai fasci delle antenne trasmettente e ricevente



Collegamenti tropodiffusione a microonde

- I collegamenti per il *tropodiffusione* nella banda delle microonde sono caratterizzati da grandi antenne (p.es., parabole con diametri dell'ordine di 10-20 m erano usate per collegamenti effettuati a frequenza dell'ordine dei 900 MHz), con prestazioni di banda relativamente modeste
- A frequenze inferiori servirebbero antenne di dimensioni eccessive per avere un guadagno sufficiente e quindi troppo costose. A frequenze più elevate si hanno perdite di trasmissione notevoli
- L'affidabilità dei collegamenti non è elevata poiché **i segnali mostrano una notevole evanescenza causata dal continuo mutare delle condizioni delle di diffusione.**
- Un contributo alla diffusione può anche essere dovuto alla **presenza di pioggia** nel volume comune ai 2 fasci d'antenna.
- I collegamenti tropodiffusione, molto diffusi negli anni 50-60, sono stati soppiantati dai **collegamenti via satellite**, molto più affidabili.
- Si noti che le fluttuazioni dell'indice di rifrazione producono **scintillazioni** (sono variazioni rapide del segnale ricevuto) e possono contribuire al fenomeno del multipercorso (multipath).





Diffusione di Bragg da superfici rugose

Superfici debolmente rugose

- Sia S una **superficie di separazione tra 2 mezzi** (p.es. aria e mare) in un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z) .

L'altezza della superficie sia data da:

$$z = \zeta(x,y) \text{ con: } \langle \zeta(x,y) \rangle = 0$$

- Se un'onda piana uniforme incide su S , detto \mathbf{E} il campo totale (incidente + diffusione) ed assumendo che:

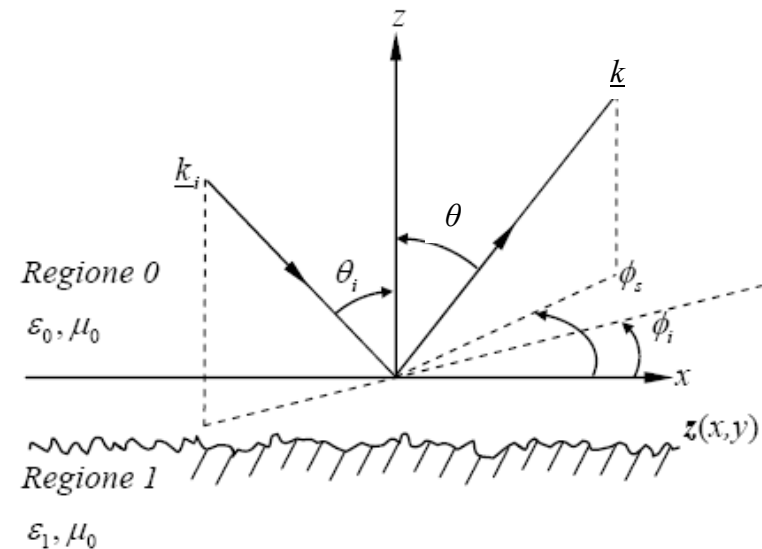
$$k_0 \zeta(x,y) \ll 1,$$

$$\partial \zeta(x,y) / \partial x \ll 1, \partial \zeta(x,y) / \partial y \ll 1,$$

si può ancora considerare uno sviluppo in serie di Taylor delle componenti del campo \mathbf{E} (in questo caso rispetto all'altezza z):

$$E_p = A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2 + \dots = E_0 + E_1 + E_2$$

E_p rappresenta una componente polarizzata del campo



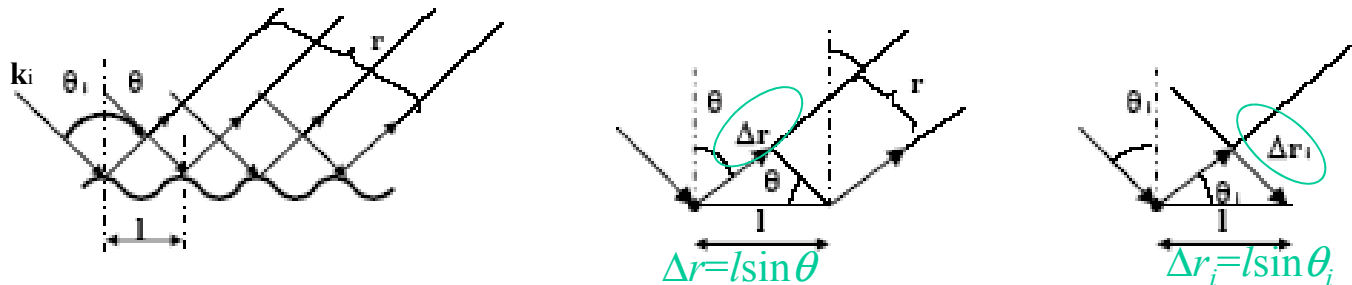
$\partial \zeta(x,y) / \partial x$ e $\partial \zeta(x,y) / \partial y$ sono le pendenze della superficie

Diffusione superficiale di Bragg (1/2)

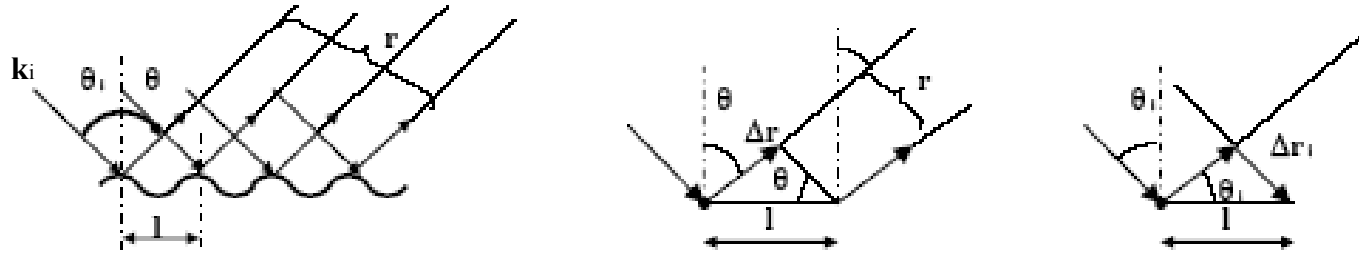
- **Volume ridotto a superficie irregolare.** Sia \mathbf{k}_s è una frequenza spaziale che, essendo fissata la direzione \mathbf{k}_i , varia al variare di $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{r}_0$. Al variare della direzione di osservazione, si seleziona una determinata frequenza spaziale $\mathbf{k}_s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_i$. Dal metodo di Born per volumi diffondenti V si ha:

$$P_R = \langle P_R \rangle + \tilde{P}_R \quad \text{con} \quad \tilde{P}_R = P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} V \Phi_n(\mathbf{k}_s) \rightarrow P_i k_o^4 \frac{\sin^2 \chi}{(2\pi)^2 r^2} A \Phi_\zeta(\mathbf{k}_s)$$

- Le irregolarità di una superficie possono essere descritte da uno spettro. **Ogni componente dello spettro può essere rappresentata da una struttura periodica** come quella in figura in cui l rappresenta la lunghezza d'onda spaziale associata alla frequenza spaziale selezionata : $2\pi/l = k_s$.
- Consideriamo un'onda piana con vettore di propagazione \mathbf{k}_i che incide su tale struttura periodica ed una certa direzione di osservazione, ossia una determinata frequenza dello spettro.



Diffusione superficiale di Bragg (1/2)



- Lo sfasamento totale in ricezione sarà:
$$\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(\Delta r - \Delta r_i) = (2\pi/\lambda) l(\sin\theta - \sin\theta_i)$$
- Il contributo massimo si ha per
$$\Delta\phi = 2\pi \rightarrow l = \lambda / (\sin\theta - \sin\theta_i) \rightarrow k_s = k_0(\sin\theta - \sin\theta_i)$$
- La scala spaziale l selezionata (ed associata a k_s) è quella per cui, *fissate le direzioni d'incidenza e di osservazione*, si ha il contributo massimo in ricezione, ossia quella per cui si innesca il fenomeno di **risonanza di Bragg**.
- L'andamento periodico di figura può rappresentare anche una **componente spettrale delle irregolarità di una superficie** (caso del mare mosso).

Applicazione a superfici debolmente rugose

- Si dimostra che, limitandoci al I° ordine e definendo il **coefficiente di diffusione bistatico** (dipendente dalle polarizzazioni dei campi incidente p e diffuso q) di una **porzione A della superficie illuminata** come:

$$\sigma_{pq}(\theta_i, \varphi_i; \theta, \varphi) = \frac{1}{A} \frac{4\pi r^2 \tilde{P}_R}{P_i} = \frac{4\pi r^2 \langle |E_1|^2 \rangle / 2\eta}{A |E_0|^2 / 2\eta},$$

r è la distanza del punto di osservazione dal centro di A

la **componente incoerente** di tale coefficiente è proporzionale alla densità spettrale delle rugosità della superficie:

$$\sigma_{pq} \propto \Phi_{\zeta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) = \Phi_{\zeta}(k_0 \sin \theta - k_0 \sin \theta_i)$$

k_t e k_{it} sono le componenti tangenziali alla superficie dei vettori \mathbf{k} e \mathbf{k}_i

- Tra tutte le componenti spettrali delle rugosità della superficie (frequenze spaziali), la densità di potenza in una certa direzione è determinata solo dalla componente $\mathbf{k} - \mathbf{k}_i$ che innesca il **fenomeno della risonanza di Bragg**.
- La **componente coerente** del campo diffuso è tipicamente data dall'onda riflessa secondo Fresnel dalla superficie piana media associata alla superficie rugosa
- Il metodo descritto è anche detto **metodo delle piccole perturbazioni** (SPM, Small perturbation method) e vale se le rugosità sono piccole (rispetto a λ).



Ottica geometrica (perturbazione di scala)

Perturbazione di scala del parametro (1/2)

- Si suppone di conoscere la soluzione quando il parametro ha una certa scala di variazione e si cerca una soluzione (approssimata) quando ci si discosta da tale scala.
- Ammettiamo allora che la soluzione sia nota per una scala di variazione dell'indice di rifrazione estremamente lenta rispetto alla lunghezza d'onda λ . Detta l tale scala di variazione si suppone quindi che:

$$l \gg \lambda, \text{ cioè } \lambda \rightarrow 0$$

- La soluzione per $\lambda \rightarrow 0$ è nota come **soluzione dell'OTTICA GEOMETRICA**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-jk_0 L(\mathbf{r})}$$

- $L(\mathbf{r})$ è una funzione reale del vettore di posizione \mathbf{r} detta *funzione iconale*.
- La soluzione dell'ottica geometrica si assume come soluzione di ordine 0. Le soluzioni di ordine superiore si ottengono perturbando la costante di propagazione $k_0 = \beta_0 = 2\pi/\lambda$ (si assume mezzo senza perdite).

Perturbazione di scala del parametro (2/2)

La perturbazione di $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ si esprime ponendo :

$$k_0 = \frac{k_g}{\zeta} \quad (\zeta \text{ è un parametro})$$

Sostituendo tale espressione di k_0 nell'equazione delle onde, per il caso scalare si ha :

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + \left(\frac{k_g}{\zeta} \right)^2 n^2(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = E(\mathbf{r}, \zeta)$$

Assumendo che la soluzione abbia lo stesso termine di fase di quella dell'ottica geometrica, si sviluppa in serie l'ampiezza $E_0(\mathbf{r}, \zeta)$

Si ricava allora la seguente serie asintotica convergente per $\zeta \rightarrow 0$:

$$E = e^{-jk_0 L} (A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2 + \dots)$$

per ricavare i parametri $A_0, A_1, A_2 \dots$ si inserisce lo sviluppo asintotico nell'equazione delle onde riportata sopra.

Si noti che in questo caso non solo i termini A_i dipendono da r , ma anche L .

Sviluppo di Luneburg-Kline (1/3)

Sostituendo lo sviluppo asintotico nell'equazione delle onde e separando le varie potenze di ζ si ottiene un insieme di equazioni:

$$\Rightarrow \zeta^{-2} \rightarrow -k_g^2 |\nabla L|^2 A_0 + k_g^2 n^2 A_0 = 0 \rightarrow |\nabla L|^2 = n^2 \quad \text{equazione iconale}$$

$$\Rightarrow \zeta^{-1} \rightarrow (-j)k_g \nabla^2 L A_0 - k_g |\nabla L|^2 A_1 + 2(-j)k_g \nabla L \cdot \nabla A_0 + k_g^2 n^2 A_1 = 0$$

$$\Rightarrow \zeta^0 \rightarrow (-j)k_g \nabla^2 L A_1 - k_g |\nabla L|^2 A_2 + 2(-j)k_g \nabla L \cdot \nabla A_1 + \nabla^2 A_0 + k_g^2 n^2 A_2 = 0$$

Separando le parti reale ed immaginaria della II^a equazione si ha:

$$\begin{cases} A_0 \nabla^2 L + 2 \nabla L \cdot \nabla A_0 = 0 & \text{equazione del trasporto (imperturbata)} \\ |\nabla L|^2 = n^2 \end{cases}$$

il secondo termine della terza equazione, per l'equazione iconale, si elide con il quinto. Moltiplicando tutto per j si ricava:

$$k_g \nabla^2 L A_1 + 2k_g \nabla L \cdot \nabla A_1 + j \nabla^2 A_0 = 0 \rightarrow 2 \nabla L \cdot \nabla A_1 + \nabla^2 L A_1 = \frac{-j \nabla^2 A_0}{k_g}$$

Sviluppo di Luneburg-Kline (2/3)

$$2\nabla L \cdot \nabla A_1 + \nabla^2 L A_1 = \frac{-j\nabla^2 A_0}{k_g}$$

rappresenta l'equazione di trasporto per il 1° ordine di approssimazione:
il secondo membro è un termine noto della soluzione precedente
(ottica geometrica).

Le soluzioni di ordine superiore A_2, A_3, \dots si ottengono per iterazione.

Ponendo : $E_0 = A_0$; $\frac{E_1}{jk_0} = A_1 \zeta$; $\frac{E_2}{(jk_0)^2} = A_2 \zeta^2$; ...

si ottiene lo sviluppo di Luneburg - Kline:

$$E(\mathbf{r}) = e^{-jk_0 L} \left(E_0 + \frac{E_1}{jk_0} + \frac{E_2}{(jk_0)^2} + \dots \right) = e^{-jk_0 L(\mathbf{r})} \sum_m \frac{E_m(\mathbf{r})}{(jk_0)^m}$$

Sviluppo di Luneburg-Kline (2/2)

Lo sviluppo di Luneburg-Kline può essere anche espresso in serie di potenze della pulsazione ($k_0 = \omega/c$):

$$E(\mathbf{r}) = e^{-jkL(\mathbf{r})} \sum_m \frac{E_m(\mathbf{r})}{(j\omega)^m}$$

Per lo sviluppo nel caso vettoriale, l'estensione è data da:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e^{-jk_0L(\mathbf{r})} \sum_m \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})}{(jk_0)^m}$$

Per la soluzione di ordine zero (soluzione imperturbata o di *OTTICA GEOMETRICA*) nel caso vettoriale si ha:

$$\begin{cases} |\nabla L| = n \\ (\nabla L \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \nabla^2 L = 0 \end{cases}$$

Il termine noto dell'equazione di trasporto al m° ordine dipende dalla soluzione dell'equazione di ordine $m-1$:

$$(\nabla L \cdot \nabla) \mathbf{E}_m + \frac{1}{2} \mathbf{E}_m \nabla^2 L = -\frac{j}{2} \nabla^2 \mathbf{E}_{m-1}$$

Soluzione dell'ottica geometrica

Osservando l'espressione dello sviluppo di Luneburg-Kline:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e^{-jk_0L(\mathbf{r})} \sum_m \frac{\mathbf{E}_m(\mathbf{r})}{(jk_0)^m},$$

si può notare come il primo termine abbia una dipendenza dalla frequenza presente solo nel termine di fase (e^{-k_0L}) mentre gli altri hanno anche una dipendenza del tipo $(jk_0)^{-m}$.

Si deduce quindi che, nell'approssimazione dell'ottica geometrica, si suppone che il valore di k_0 sia talmente elevato da permettere di ignorare tutti i termini dello sviluppo tranne \mathbf{E}_0 e si ha quindi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-jk_0L(\mathbf{r})}$$

$$\text{con: } \begin{cases} |\nabla L| = n \\ (\nabla L \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \nabla^2 L = 0 \end{cases}$$

I vettori ∇L ed \mathbf{E}_0 sono lentamente variabili, ossia variano apprezzabilmente solo su distanze molto maggiori della lunghezza d'onda.