

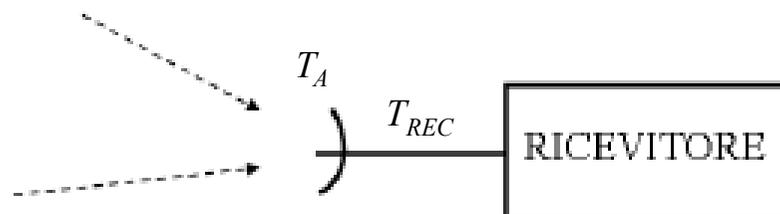


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Rumore e teoria del trasferimento radiativo

Rumore d'antenna

- Il rumore d'antenna, segnale spurio che si localizza all'uscita di ogni antenna ricevente, è il risultato di un meccanismo di captazione di una molteplicità di segnali emessi da corpi radianti situati nell'ambiente circostante; tale segnale va ad aggiungersi ad un disturbo generato entro le apparecchiature riceventi.
- La presenza del rumore pone una condizione sul livello minimo del segnale, il quale non può scendere al di sotto di una certa soglia rispetto al rumore, superata la quale la rivelazione diventa erronea (bit errati nei sistemi digitali) o impossibile.
- Le prestazioni di un sistema vengono quindi valutate quindi in base al **rapporto segnale rumore (SNR)**.
- Si usa esprimere la potenza del rumore captato dall'antenna per mezzo di un parametro, detto **temperatura di rumore d'antenna** T_A [K] ed il rumore termico dei componenti del ricevitore la **temperatura equivalente di rumore in ingresso al ricevitore stesso** T_{REC} [K].



Temperatura di rumore di un'antenna (1/2)

- Una resistenza a temperatura T ha una potenza di rumore disponibile generata per effetto termico pari a: $W_n = KT\Delta f$ [W]

K : costante di Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K), Δf : banda di frequenza [Hz]

- La *temperatura di rumore di antenna* T_A è la temperatura che dovrebbe avere la resistenza di radiazione R_r dell'antenna per produrre una potenza di rumore W_n nella banda Δf , ovvero:

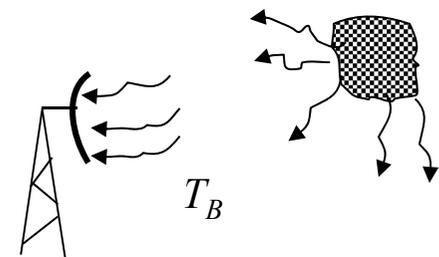
$$W_n = KT_A \Delta f \text{ [W]}$$

- Ogni corpo con una temperatura T al di sopra dello zero assoluto irradia energia e.m. incoerente in tutte le direzioni e in ogni banda di frequenza dello spettro e.m.. Nella regione delle microonde, si definisce *temperatura di brillantezza* del corpo:

$$T_B(\theta, \varphi) = eT \text{ [K]} \quad e: \text{emissività [adim]} (0 \leq e \leq 1 \rightarrow T_B \leq T)$$

L'emissività dipende da angolo di osservazione, frequenza, caratteristiche della superficie e composizione del corpo.

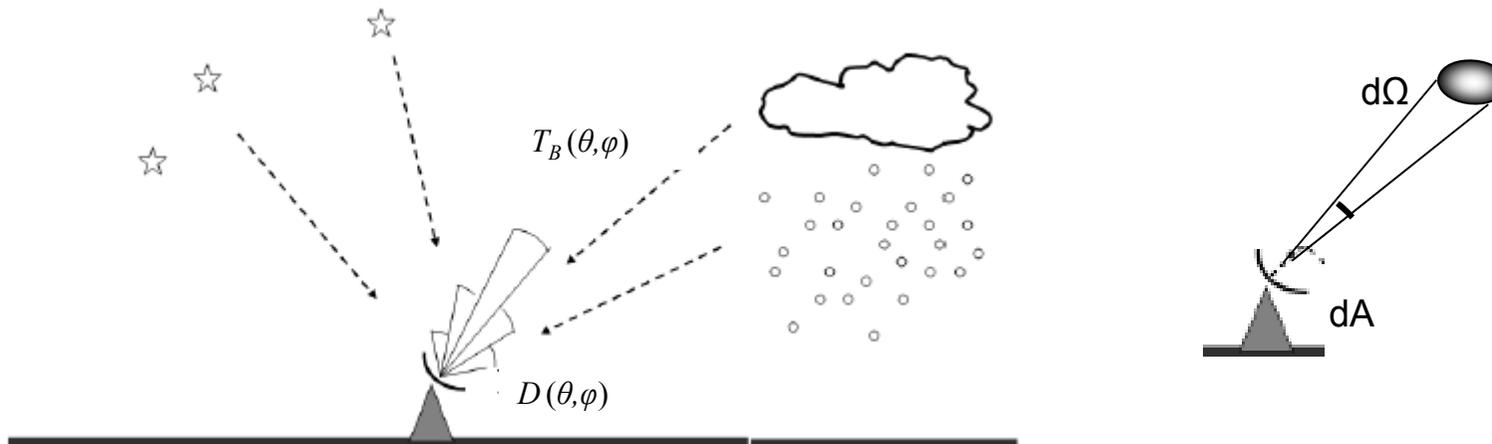
In condizioni di *equilibrio termodinamico locale*, l'emissività del corpo deve essere uguale alla sua assorbività, ovvero tanta intensità di radiazione viene emessa quanta ne viene assorbita.



Temperatura di rumore di un'antenna (2/2)

- La temperatura T_A è data dalla $T_B(\theta, \varphi)$ incidente sull'antenna dalle diverse direzioni, pesata dalla direttività dell'antenna stessa:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$



- Se esistono perdite nell'antenna che ha efficienza di radiazione $\eta_r = R_r / (R_r + R_L)$ (cfr. circuito equivalente) e temperatura T_0 , la potenza di rumore disponibile da R_r si dissipa in parte su R_L che a sua volta però genera rumore trovandosi a temperatura T_0 . Ne consegue che la temperatura di rumore alla porta di uscita dell'antenna T_A' vale:

$$T_A' = \eta_r T_A + T_0(1 - \eta_r)$$

Potenza di rumore

- Per la potenza di rumore in funzione della temperatura di brillantezza incidente sull'antenna si ha:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{1}{\lambda^2} \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) A_{eq}(\theta, \varphi) d\Omega$$

Per una larghezza di banda Δf :

$$W_N = K T_A \Delta f = \frac{K \Delta f}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{K \Delta f}{\lambda^2} \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) A_{eq}(\theta, \varphi) d\Omega$$

- La potenza che l'antenna riceve da tutto lo spazio circostante si ottiene integrando i contributi ricevuti da tutte le direzioni.
- Per ogni direzione (θ, φ) il contributo al rumore ricevuto è dovuto al prodotto di due fattori: la direttività che dipende solo dalle caratteristiche dell'antenna e la temperatura di brillantezza che dipende solo dal mezzo circostante.

Rumore nell'apparato ricevente

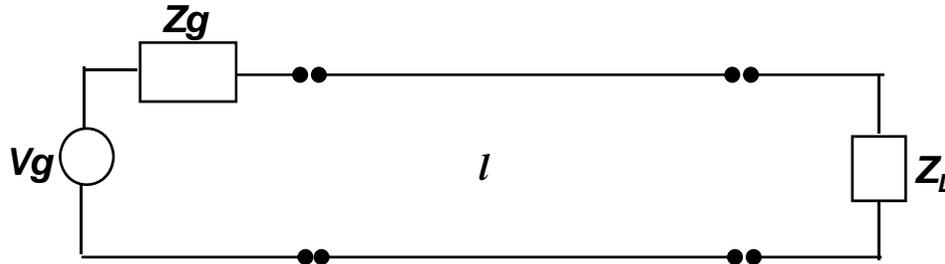
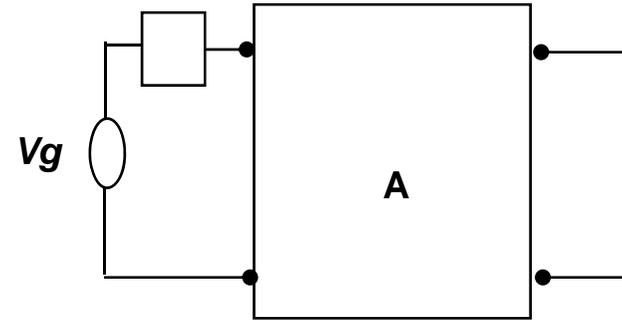
Per una **rete 2 porte** con amplificazione A , potenza del segnale di ingresso W_i , adattata ad un generatore di resistenza R_g a temperatura T_0 , il **fattore di rumore** dell'amplificatore è definito come (nella banda di frequenze $B=\Delta f$): **Z_g**

$$F = (\text{SNR})_{\text{in}} / (\text{SNR})_{\text{out}} = (W_i / KT_0 B) / [AW_i / (AKT_0 B + W_{nA})]$$

W_{nA} : rumore dovuto all'amplificatore *all'uscita*.

$$F = 1 + (W_{nA} / AKT_0 B) \rightarrow W_{nA} = (F-1)T_0 AKB = T_F AKB$$

T_F : temperatura di rumore della rete 2 porte $T_F = (F-1)T_0$



Si consideri ora una **linea di trasmissione** dissipativa lunga l a temperatura T_0 . In condizioni di equilibrio termodinamico alla porta di uscita della rete (a monte del carico), si ha:

$$KT_0 B = \underbrace{KT_0 B / L}_{\text{Dovuto a } Z_L} + \underbrace{W_{nL}}_{\text{Dovuto a } Z_g \text{ ed alla rete}}$$

$L = \exp(2\alpha l)$: perdite nella linea

α : costante di attenuazione, W_{nL} : rumore dovuto alla rete

Rumore in una linea di trasmissione

Dalla precedente relazione si ottiene:

$$W_{nL} = KT_0B(1-1/L) = KT_0B(L-1)/L$$

$$W_{nA} = KBT_0(F-1)A$$

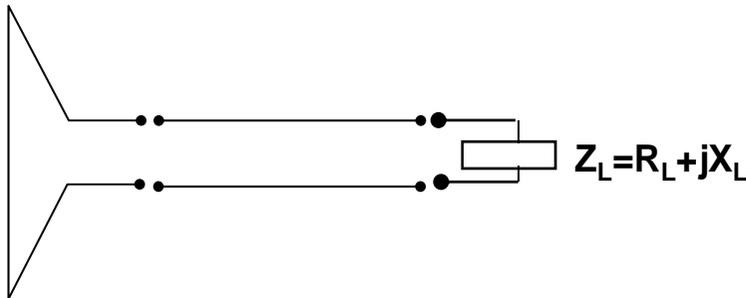
Paragonando questa espressione con quella dell'amplificatore (W_{nA}) si vede come la linea si comporti come un amplificatore di guadagno $1/L$ e fattore di rumore $F=L$

Dato che l'antenna è connessa al carico (ovvero al ricevitore) da una linea di trasmissione, la potenza di rumore sul carico (trascurando i disadattamenti) è data dal contributo della temperatura di antenna attenuato del fattore L , più il rumore introdotto dalla linea stessa:

$$W_n = (KT_A B/L) + (KT_0 B(L-1)/L) = (KB/L)(T_A + (L-1)T_0)$$

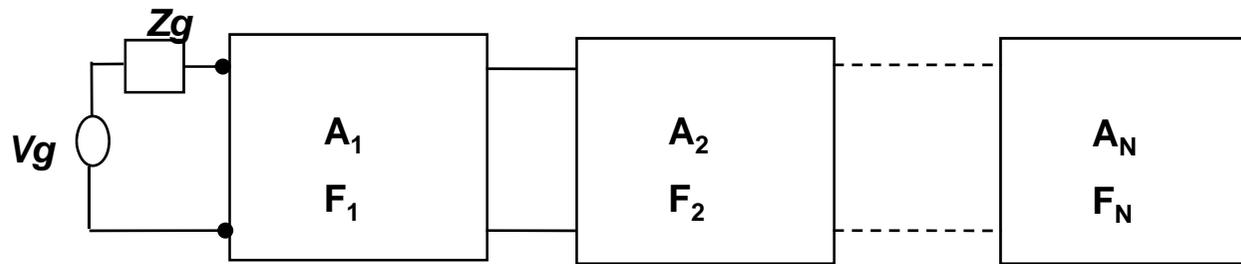
In pratica la temperatura d'antenna diviene $T_A'' = (T_A'/L) + ((L-1)T_0/L) =$

$$= T_A' \exp(-2\alpha l) + T_0 [1 - \exp(-2\alpha l)]$$



Stadi in cascata

Generalmente il ricevitore è costituito da più stadi in cascata (amplificatore RF, mixer, amplificatore IF, etc.). Il fattore di rumore complessivo di una cascata di reti 2 porte è dato da:



$$F = F_1 + (F_2 - 1)/A_1 + (F_3 - 1)/A_1A_2 + \dots + (F_N - 1)/A_1A_2 \dots A_{N-1}$$

In base a questa espressione si nota come, dal punto di vista del SNR convenga usare, come prima rete, una avente F più basso possibile ed A più alto possibile.

In questo caso la potenza di rumore *all'uscita* dovuta alla catena ricevente è:

$$W_{nREC} = (F-1)T_0AKB = T_{REC}AKB \quad [\text{in ingresso è } T_{REC}KB = (F-1)T_0KB]$$

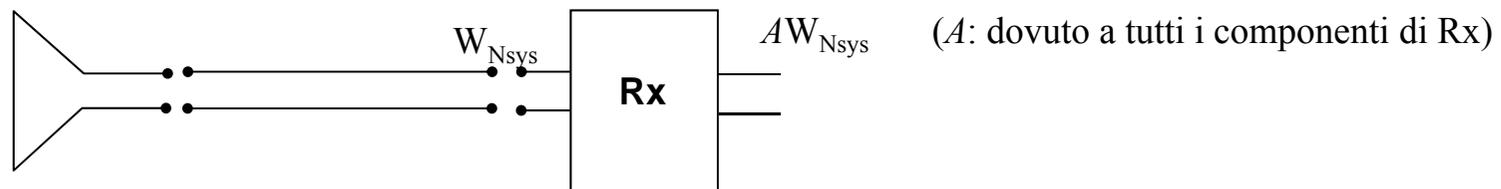
dove F è dato dalla formula scritta sopra e $A = A_1A_2 \dots A_{N-1}A_N$

Temperatura di rumore di sistema

- T_{REC} è la temperatura equivalente di rumore in ingresso al ricevitore, dovuta al rumore termico dei suoi componenti.
- A monte del ricevitore, ossia a valle della linea di trasmissione che connette l'antenna ricevente al ricevitore stesso, considerando sia la temperatura di antenna che T_{REC} , possiamo definire la potenza di rumore complessiva W_{Nsys} del sistema ricevente:

$$W_{Nsys} = K(T_{REC} + T_A'')B = KT_{sys}B$$

dove T_{sys} è la temperatura equivalente di rumore in ingresso del sistema ricevente pari a $T_A'' + T_{REC}$



Rapporto segnale rumore

- Per caratterizzare le prestazioni un'antenna in ricezione si fa riferimento al **rapporto segnale-rumore SNR** o (S/N) , definito come il rapporto tra la potenza di segnale e la potenza di rumore *all'ingresso di un ricevitore equivalente privo di rumore*.
- Dalla formula di Friis e dall'espressione della potenza di rumore in ricezione, ricaviamo:

$$\frac{S}{N} = \frac{W_r}{W_{N_{sys}}} = \frac{EIRP G_r / (L_{fs} L_{path} L_{sys})}{K T_{sys} B} = \frac{EIRP G_r / (L_{fs} L_{path} L_{sys})}{K (T_{rec} + T_A'') B}$$

- E' anche usuale caratterizzare il collegamento in termini di **rapporto Portante-Rumore** (C/N) e **Energia-bit-Rumore** (E_b/N_0) :

$$\frac{C}{N} = \frac{S}{N} \Delta f = \frac{E_b}{N_0} R_b$$

Il rapporto S/N è sostanzialmente il rapporto C/N per unità di banda, mentre R_b (b/s) il tasso di trasmissione per bit .

- Si definisce anche il rapporto G/T :

$$\frac{G}{T} = \frac{G_{max r}}{T_{sys}}$$

Brillanza (radianza)

- Abbiamo introdotto una grandezza, la *temperatura di brillanza* che si considera alle frequenze delle microonde. Nel caso generale, una grandezza che consente di quantificare l'energia e.m. incoerente che un materiale è in grado di emettere è la *brillanza* B [$\text{W sr}^{-1} \text{m}^{-2}$] (o *radianza*, adottando la terminologia propria del campo del visibile o dell'infrarosso).
- Consideriamo un'antenna Tx a distanza R da un'antenna Rx di area equivalente $A_r(\theta, \varphi)$ orientate nella direzione di massima direttività. Supponendo di essere in campo lontano, se P_i è la densità di potenza incidente sull'antenna Rx, la potenza ricevuta è:

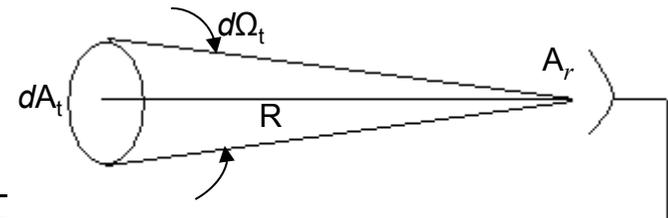
$$W_r = P_i(R, \theta, \varphi) A_r$$

- Se si sostituisce all'antenna Tx di area A_t , un elemento dA_t di una *superficie naturale che irradia energia*, visto sotto l'angolo solido $d\Omega_t$, la potenza ricevuta dall'antenna sarà:

$$dW_r = dP_i(R, \theta, \varphi) A_r(\theta, \varphi)$$

- Si definisce allora una quantità non infinitesima, la *brillanza* B , che *rappresenta la distribuzione nell'angolo solido dell'intensità del vettore di Poynting (densità di potenza)*:

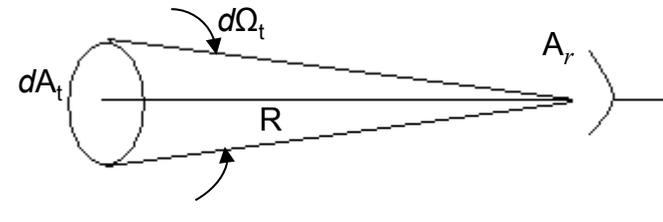
$$B(\theta, \varphi) = dP_i(R, \theta, \varphi) / d\Omega_t \quad [\text{W/sr m}^2]$$



Potenza in funzione della brillantezza

- Riferendosi alla figura, si ha per l'angolo solido differenziale: $d\Omega_t = dA_t / R^2$.
- La potenza ricevuta attraverso l'angolo solido $d\Omega_t$ risulta pari a:

$$dW_r = B(\theta, \varphi) A_r(\theta, \varphi) d\Omega_t$$



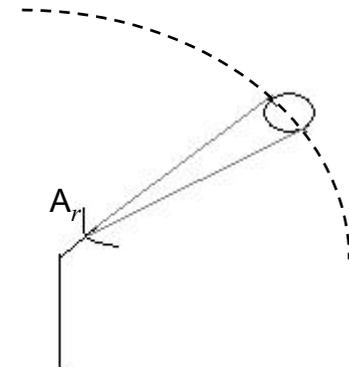
- Si definisce inoltre la *brillantezza spettrale* o specifica $B_f(\theta, \varphi)$ come la brillantezza per unità di frequenza:

$$B_f(\theta, \varphi) = B(\theta, \varphi) / df \quad [\text{W/sr m}^2 \text{ Hz}]$$

- In funzione della brillantezza specifica, la **potenza totale, nella banda Δf , ricevuta da un'antenna (di area equivalente A_r) da un corpo trasmittente che la circonda** è esprimibile mediante la formula seguente:

$$W_r = \frac{1}{2} \int_{f-4\pi}^{f+4\pi} \int \int B_f(\theta, \varphi) A_r(\theta, \varphi) d\Omega_t df$$

dove il fattore 1/2 rende conto del fatto che la *brillantezza emessa da sorgenti naturali è non polarizzata* mentre un'antenna riceve potenza solo in una data polarizzazione. Se il corpo non circonda l'antenna si integrerà su $\Omega_t < 4\pi$





SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Spettroscopia molecolare

Teoria quantistica della radiazione

- Qualsiasi sostanza (alla temperatura superiore dello 0 K) è in grado di irradiare energia elettromagnetica. Nel semplice **caso di un gas**, le onde e.m. sono irradiate a **frequenze discrete**, ovvero sono caratterizzate da specifiche **righe spettrali** in accordo con la teoria quantistica, in base alla quale ogni riga dello spettro di radiazione di un *gas molecolare* corrisponde ad una transizione tra due livelli energetici ammissibili.
- Se la transizione avviene tra due livelli quantici di energia pari a \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , la frequenza della radiazione emessa (*fotone*) è data dalla **relazione di Einstein**:

$$f = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) / h \quad (h \text{ è la costante di Planck pari a } 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ [J Hz}^{-1}\text{)})$$

dove nel caso specifico dell'**emissione** il livello raggiunto si trova ad energia più bassa ($\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$).

- Analogamente, la radiazione incidente su una molecola può essere **assorbita** portando la molecola ad un livello permesso ad energia più elevata se la frequenza soddisfa la relazione di Einstein.
- Lo **spettro di assorbimento** di un gas è quindi uguale allo **spettro di emissione**. I principi fisici suddetti si estendono anche alle strutture più complicate (solidi, liquidi).
- Gli effetti associati ai livelli energetici caratteristici delle diverse specie di gas sono detti effetti microscopici (prescindono dalla presenza di disomogeneità del mezzo o da variazioni dell'indice di rifrazione n).

Energie molecolari

- L'emissione (*spontanea*) di radiazione di una molecola è causata da collisioni con altre particelle dovute all'agitazione termica. Tali collisioni portano la molecola ad uno stato metastabile ($\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$) dal quale la molecola esce *spontaneamente* portandosi allo stato inferiore emettendo, per la relazione di Einstein, energia e.m. incoerente (nessuna relazione di fase con l'energia emessa da un'altra molecola). La probabilità di occorrenza di tali collisioni dipenderà anche dall'*energia cinetica* posseduta: essa è *definita in termini di temperatura assoluta della sostanza*.
- Le molecole dei gas possiedono un'energia che può esprimersi con la somma delle energie cinetica, vibrazionale, rotazionale ed elettronica:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{cin}} + \mathcal{E}_{\text{vib}} + \mathcal{E}_{\text{rot}} + \mathcal{E}_{\text{el}}$$

- Se una molecola possiede un momento di dipolo permanente, può essere posta in *rotazione* sotto l'azione di un campo e.m. variabile di opportuna frequenza.
- Una molecola non polare può essere deformata dall'applicazione di un campo e.m., sviluppare un dipolo indotto ed essere posta in *vibrazione* dal campo. Tutte le molecole ammettono quindi livelli di energia vibrazionale. *A temperatura ambiente poche molecole sono in vibrazione e molte sono in rotazione*: le transizioni vibrazionali non avvengono quasi mai da sole.
- Nell'ultravioletto sono anche ammesse le *transizioni elettroniche*: ad ogni transizione elettronica sono associate transizioni vibrazionali, alle quali sono associate transizioni rotazionali

Energia rotazionale (1/2)

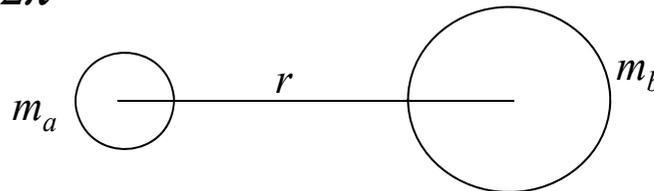
Consideriamo una molecola biatomica (p.es. l'ossido di carbonio: CO). Il suo modello per il moto rotazionale è il *rotatore rigido* ed i livelli quantizzati dell'energia rotazionale sono dati dalla relazione:

$$\mathcal{E}_{rot} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}$$

$J=0,1,2,\dots$ è il **numero quantico rotazionale**;

$I=r^2m_a m_b/(m_a+m_b)$ è il momento d'inerzia.

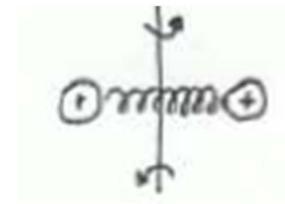
$$\hbar = h/2\pi$$



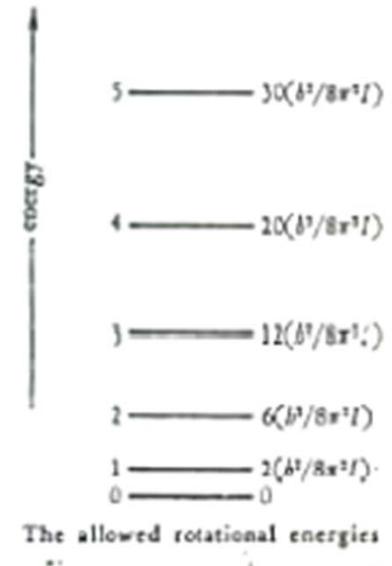
Il numero di molecole N che si trovano nello stato energetico \mathcal{E}_h è dato dalla *statistica di Boltzmann*:

$$N(\mathcal{E}_h) = N_{TOT} \frac{e^{-\mathcal{E}_h/KT}}{\sum_i e^{-\mathcal{E}_i/KT}}$$

Le transizioni osservabili sono quelle tra livelli adiacenti, ossia corrispondono alla regola $\Delta J = \pm 1$, dove il segno positivo corrisponde all'assorbimento e quello negativo all'emissione.



quantum number, J	rotational energy
0	0
1	$2(h^2/8\pi^2 I)$
2	$6(h^2/8\pi^2 I)$
3	$12(h^2/8\pi^2 I)$
4	$20(h^2/8\pi^2 I)$
5	$30(h^2/8\pi^2 I)$
6	$42(h^2/8\pi^2 I)$



Energia rotazionale (2/2)

La differenza di energia tra un livello J ed il precedente $J-1$ è:

$$\Delta\mathcal{E}_{rot} = (\hbar^2 / 2I)[J(J+1) - (J-1)J] = 2J(\hbar^2 / 2I)$$

Per la relazione di Einstein si ha:

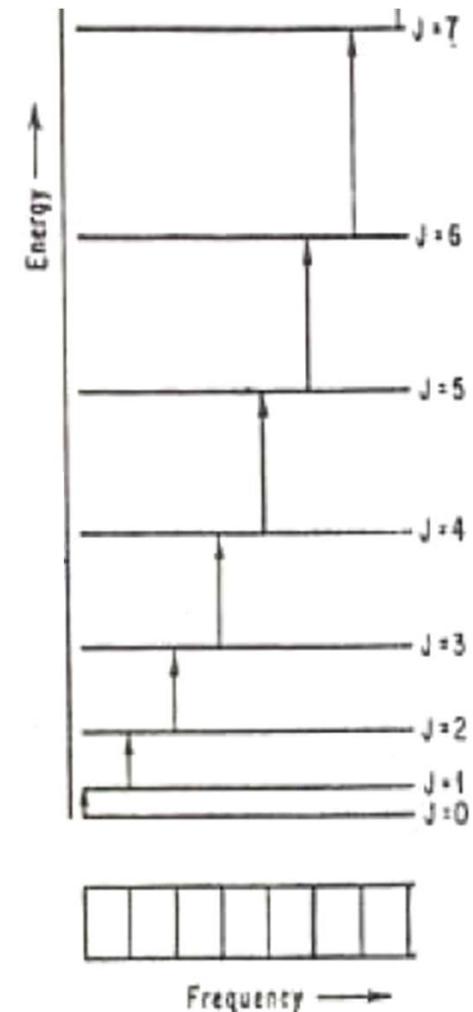
$$\Delta\mathcal{E}_{rot} = 2J(\hbar^2 / 2I) = hf \Rightarrow$$

$$f = \frac{\Delta\mathcal{E}_{rot}}{h} = \frac{\Delta\mathcal{E}_{rot}}{2\pi\hbar} = \frac{2J(\hbar^2 / 2I)}{2\pi\hbar} = \frac{2\hbar J}{4\pi I} = 2BJ$$

$$B = \frac{\hbar}{4\pi I} : \text{costante rotazionale e}$$

I livelli energetici sono spazati secondo legge quadratica a causa del termine $J(J+1)$.

Lo spettro è a linee equispaziate e la loro separazione è data dalla costante $2B$.



Energia vibrazionale (1/2)

Il modello per il moto vibrazionale di una molecola biatomica è l'*oscillatore armonico*. I livelli energetici sono funzione del **numero quantico vibrazionale v** :

$$\mathcal{E}_{vib} = hf_0(v + 1/2)$$

$f_0 = (1/2\pi)\sqrt{\beta/m_r}$: frequenza di oscillazione (IR)
 m_r : massa equivalente del sistema ($1/m_r = 1/m_1 + 1/m_2$)
 β : costante di forza (di richiamo)
 $v=0,1,2,\dots$; $\Delta v=\pm 1$

Rispetto all'oscillatore classico, nell'oscillatore quantistico le energie permesse al sistema sono solo quelle corrispondenti ai diversi valori discreti di v . Esse sono separate tra loro dalla quantità costante hf_0 .

In questo caso, $\Delta\mathcal{E}_{rot}=hf_0=hf \rightarrow$ i livelli energetici sono equispaziati e lo spettro è a riga unica (nella molecola biatomica).

Per molecola poliatomiche si ha: $\mathcal{E}_{vib} = \sum_k hf_k(v_k + 1/2)$ $k = 1,2,\dots,M$

M dipende dal numero N di atomi: $3N-5$ per molecole lineari, $3N-6$ per le altre molecole.

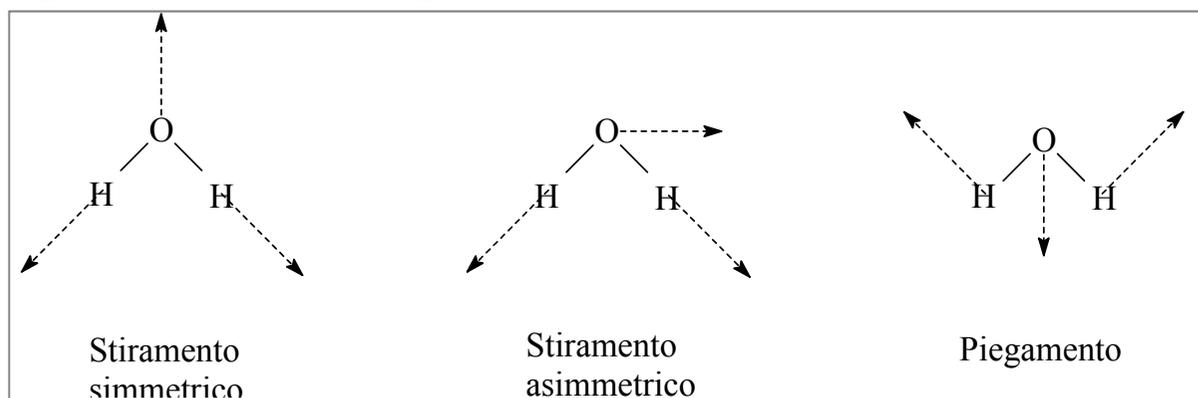
Al crescere di v_k si devono ammettere salti $\Delta v > \pm 1$: oltre alla riga fondamentale si avranno più armoniche sempre meno intense.

Energia vibrazionale (2/2)

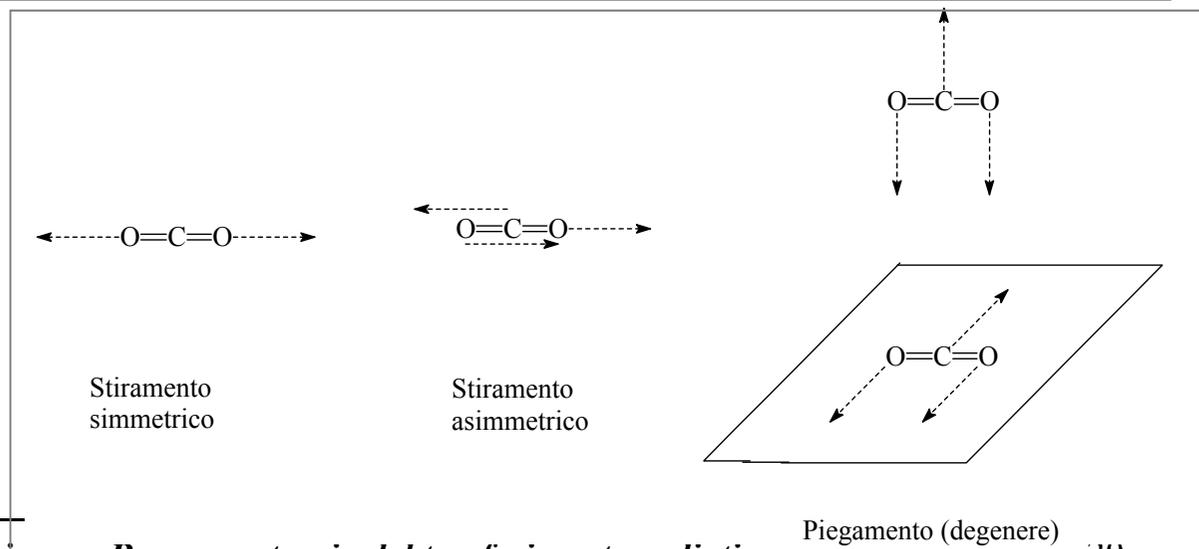
- Una molecola biatomica ha un unico modo di vibrazione, nel quale i due atomi oscillano lungo una direzione o grado di libertà, mentre il centro di massa rimane stazionario.
- Una molecola composta di N atomi ha più modi normali di vibrazione. La posizione di un singolo atomo è descritta da 3 coordinate e quindi la configurazione spaziale degli N atomi della molecola richiede un totale di $3N$ coordinate (gradi di libertà della molecola):
 - tre di tali coordinate specificano la posizione del centro di massa
 - le restanti $3N-3$ coordinate descrivono i moti interni della molecola. Di queste, tre coordinate descrivono la rotazione della molecola attorno alle tre direzioni dello spazio geometrico e le restanti $3N-6$ sono i gradi di libertà di vibrazione degli N atomi.
 - Nel caso in cui la molecola sia lineare sono necessarie solo due coordinate di rotazione e quindi i possibili modi normali di vibrazione salgono a $3N-5$

Esempi

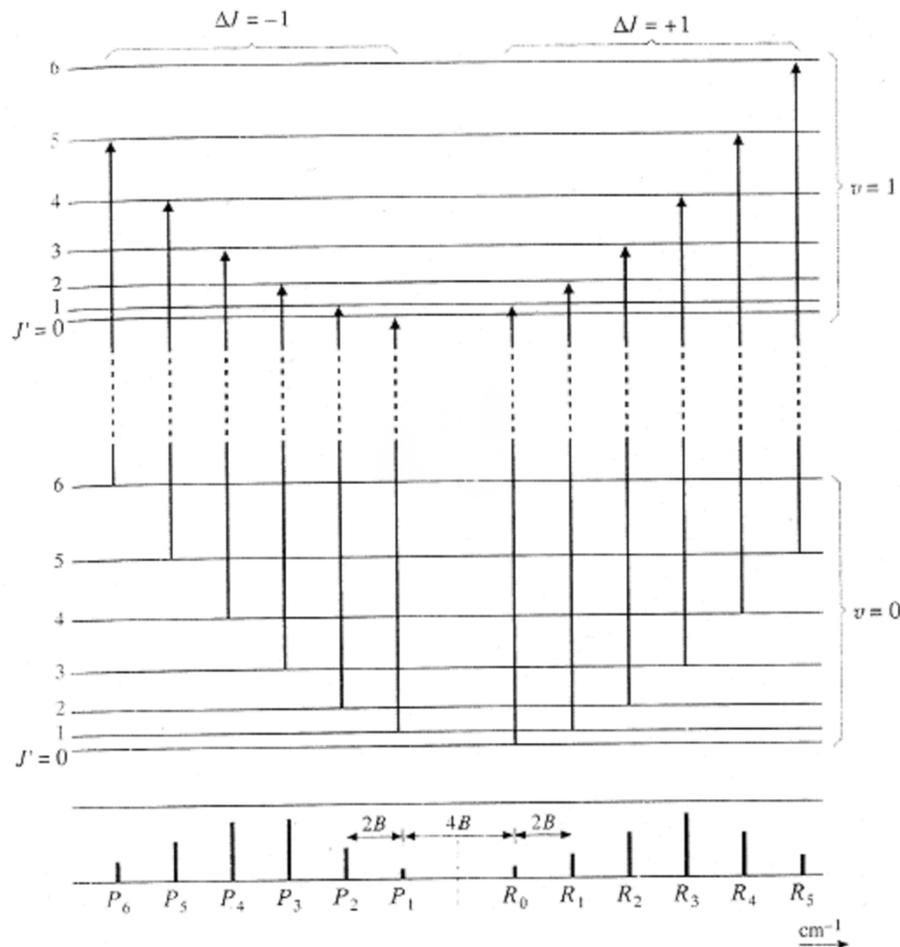
- La molecola H_2O , triatomica e non lineare, può avere $3 \times 3 - 6 = 3$ modi di vibrazione. Questi sono schematizzati in figura, indicando con una freccia tratteggiata lo spostamento di un atomo nel corso della vibrazione (si noti che la nomenclatura internazionale usata universalmente è *stretching* = stiramento, *bending* = piegamento o modo angolare).



- La molecola CO_2 , triatomica e lineare, può avere $3 \times 3 - 5 = 4$ modi di vibrazione. E' da notare che si hanno due modi possibili di piegamento; alternativamente questo modo è detto doppiamente degenere



Transizioni molecolari e vibrazionali per una molecola biatomica



Quando si misura uno spettro IR di un gas come il CO (spettrometro ad alta risoluzione) si nota che la banda di assorbimento è costituita da una serie di picchi separati da pochi cm^{-1} (in num. d'onda). Questa struttura fine è dovuta a transizioni energetiche vibrazionali fra diversi sottolivelli rotazionali. Si hanno fenomeni di accoppiamento tra energia rotazionale e vibrazionale (la rotazione provoca deformazione).

Ci sarà quindi una sovrapposizione di livelli energetici rotazionali e vibrazionali: spettro roto-vibrazionale.

Il gruppo di righe con $\Delta J = +1$ si chiama ramo R mentre il gruppo di righe con $\Delta J = -1$ si chiama ramo P.

Transizioni tra il più basso stato vibrazionale, denotato da $v=0$, e lo stato successivo più elevato ($v=1$) per una molecola biatomica di gas. Ciascuno stato vibrazionale ha associati molti livelli rotazionali indicati dal numero quantico rotazionale J . La spaziatura tra i livelli rotazionali corrispondenti allo stesso stato vibrazionale è stata considerevolmente aumentata per rendere la figura più chiara.

Energie elettronica e cinetica

- Per l'energia cinetica (*l'unica non quantizzata*), si ha:

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} = (3/2)KT \rightarrow (1/2)KT \text{ per ogni grado di libert\`a (direzione di movimento)}$$

- Per l'energia elettronica si ha:

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = -\frac{m_r e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$$

$n = 1, 2, \dots$ numero quantico; $m_r = m_e m_n / (m_e + m_n)$

Z : numero atomico; m_e : massa elettrone; m_n : massa nucleo

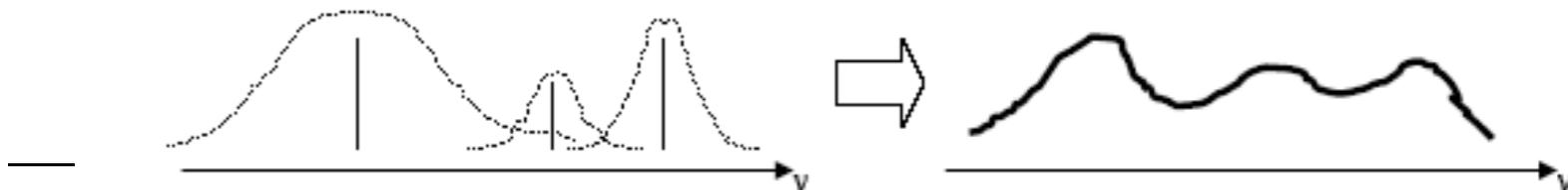
In questo caso, $\Delta\mathcal{E}_{\text{el}} = hf \sim (2-10)\text{eV}$.

- *A microonde ci sar\`a uno spettro dovuto solo righe rotazionali.*
Nell'infrarosso ci sar\`a una struttura doppia dovuta a modi roto-vibrazionali.
Nell'ultravioletto ci sar\`a una triplice struttura dovuta alla sovrapposizione di \mathcal{E}_{vib} , \mathcal{E}_{rot} , \mathcal{E}_{el} .
- Ogni molecola ha una sua struttura caratteristica (*spettroscopia molecolare*).

Spettri di assorbimento

- Un calcolo delle frequenze della radiazione assorbita o emessa per le *transizioni rotazionali* ammesse conduce ad uno spettro con righe nel campo delle *microonde*, mentre le *transizioni vibrazionali* implicano salti energetici di circa due ordini di grandezza superiori, con spettro nell'*infrarosso* e le *transizioni elettroniche* (atomo singolo) nel *visibile* e nell'*ultravioletto*.
- In definitiva le energie coinvolte nelle transizioni **elettroniche**, **vibrazionali** e **rotazionali** produrranno per le molecole uno spettro dalla configurazione più articolata, costituito da un numero superiore di righe, la cui struttura dipenderà dalle proprietà fisico-chimiche della molecola. In realtà le righe sono allargate e assumono la forma classica di campana, in conseguenza di alcuni meccanismi come l'allargamento intrinseco (dovuto al principio di indeterminazione), collisionale (urti), Doppler (moto delle molecole che emettono radiazione).

-allargamenti delle righe spettrali

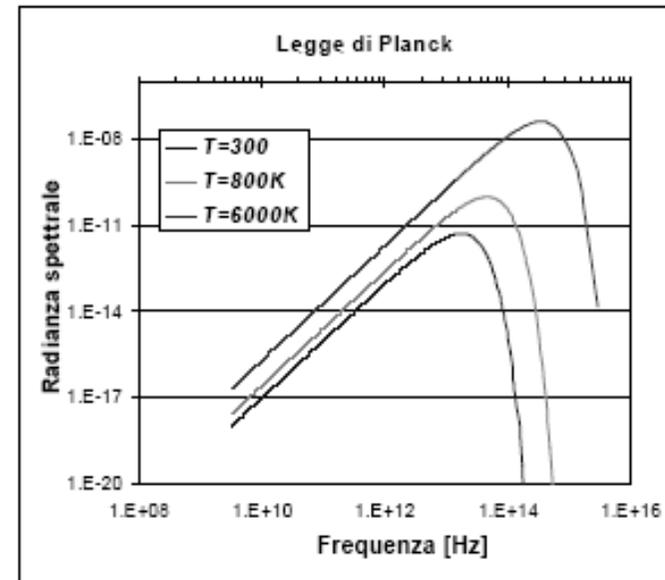


Legge di Planck

- Per la comprensione delle caratteristiche emissive dei corpi reali è necessario riferirsi alla **legge di Planck** per l'emissione di un corpo nero, ossia di un **materiale ideale perfettamente opaco in grado di assorbire tutta la radiazione incidente a tutte le frequenze dello spettro e.m., senza alcuna riflessione**.
- Per rispettare l'equilibrio termodinamico, il corpo nero, oltre ad essere un **perfetto assorbitore**, è anche un **perfetto emettitore**: quindi non solo il coefficiente di assorbimento è unitario, ma lo è anche quello di emissione.
- Un corpo nero irradia uniformemente in ogni direzione con brillantezza (o radianza) spettrale data da:

$$B_{fCN} = \frac{2hf^3}{c^2} \left(\frac{1}{e^{\frac{hf}{KT}} - 1} \right)$$

Le uniche due variabili sono f e T : avremo così una famiglia di curve per B_{fCN} . Al crescere di T , aumenta il livello di brillantezza spettrale nonché la frequenza in corrispondenza della quale si individua il massimo.



Legge di Planck

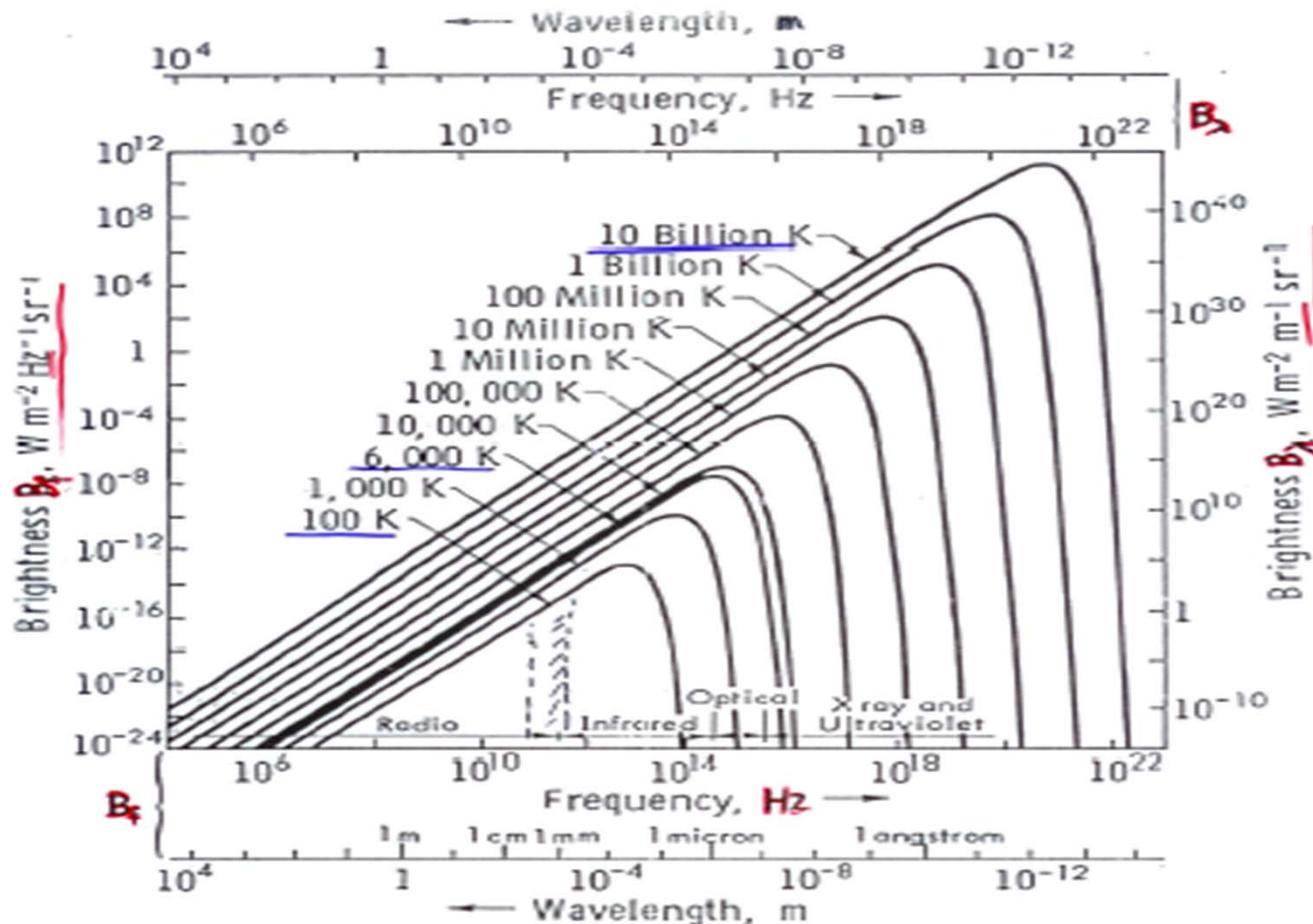


Fig. 4.4 Planck radiation-law curves (adapted from Kraus, 1966); Brillanza e Spettro di

- Area sottesa crescente con T
- Max curva va verso freq. più alte al crescere di T
- la B_λ emessa a vario freq. è crescente con T
- radiazione a larga banda

La legge di Planck fissa un limite massimo per la brillantezza ad una data frequenza per una data temperatura

Legge di Rayleigh-Jeans

- Tra le proprietà di cui gode la legge di Planck, esaminiamo l'approssimazione di Rayleigh-Jeans, poiché è di interesse applicativo nel campo delle microonde. Per $(hf/KT) \ll 1$, l'approssimazione

$$e^x - 1 = (1 + x + x^2/2 + \dots) - 1 \cong x \quad (\text{per } x \ll 1)$$

conduce a:

$$B_{fCN} = \frac{2 f^2 K T}{c^2} = \frac{2 K T}{\lambda^2}$$

Questa espressione più semplice è molto utile nella regione delle microonde: la deviazione dalla legge di Planck è inferiore all' 1% se

$$\lambda T > 0.77 \quad [\text{m K}] \quad \Rightarrow \quad f/T < 3.9 \times 10^8 \quad [\text{Hz K}^{-1}]$$

Per $T = 300 \text{ K}$ le disuguaglianze precedenti si traducono in $\lambda > 2.57 \text{ mm}$ oppure in $f < 117 \text{ GHz}$, situazione che copre gran parte dello spettro delle microonde utilizzato. A 300 GHz , l'errore commesso è circa il 3%.

- *Alle microonde si parla indifferentemente di brillantezza o temperatura (di brillantezza).*

Temperatura di brillantezza ed emissività

- Assumendo che la brillantezza, in una banda stretta Δf , possa considerarsi costante, per un corpo nero a temperatura T (temperatura fisica) avremo una radianza isotropa (ma *emissione Lambertiana*):

$$B_{CN} = B_{f_{CN}} \Delta f = \frac{2 K T}{\lambda^2} \Delta f$$

- I **materiali reali**, non assorbono necessariamente tutta l'energia incidente su di essi ed *hanno proprietà emissive inferiori* rispetto a quelle di un **corpo nero**. Per la brillantezza di un materiale reale avremo quindi che, alla stessa temperatura fisica T , risulterà $B(\theta, \varphi) \leq B_{CN}$ (e radianza non isotropa).
- Volendo utilizzare per la brillantezza di un **materiale reale**, che si trovi alla temperatura fisica T , una forma analoga a quella di B_{CN} , si introduce la **temperatura di brillantezza $T_B(\theta, \varphi)$** (o temperatura equivalente di corpo nero) che sarà immessa nella legge di Planck. Dovrà quindi risultare $T_B \leq T$ e:

$$B(\theta, \varphi) = \frac{2 K T_B(\theta, \varphi)}{\lambda^2} \Delta f$$

- Il legame tra le **proprietà radiative di un materiale reale** e di **un corpo nero** alla stessa temperatura è stabilito dall'**emissività $e(\theta, \varphi)$** :

$$e(\theta, \varphi) = \frac{B(\theta, \varphi)}{B_{CN}} = \frac{T_B(\theta, \varphi)}{T}$$

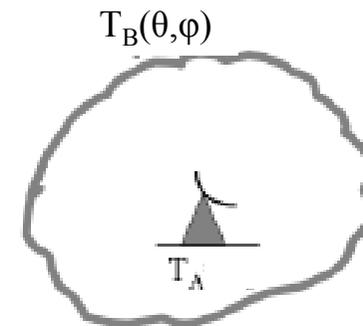
Relazione tra potenza di rumore e temperatura di brillantezza

- Consideriamo un'antenna a microonde senza perdite circondata da un corpo emissivo con temperatura di brillantezza T_B . Utilizzando l'approssimazione di Rayleigh-Jeans, la potenza disponibile ai morsetti dell'antenna, nella banda Δf , è esprimibile come:

$$\begin{aligned}
 W_r &= \frac{1}{2} \int_f^{f+\Delta f} \int_{4\pi} B_f A_{eq}(\theta, \varphi) d\Omega df = \frac{1}{2} \Delta f \int_{4\pi} \frac{2KT_B}{\lambda^2} A_{eq}(\theta, \varphi) d\Omega = \\
 &= \frac{K}{4\pi} \Delta f \int_{4\pi} T_B(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) d\Omega = KT_A \Delta f
 \end{aligned}$$

in cui, avendo considerato una banda stretta di frequenze, si è assunto B_f costante in Δf .

Se l'antenna è molto direttiva e con bassi lobi laterali si può ipotizzare che riceva potenza solo nel ristretto intervallo angolare corrispondente al lobo principale. Se in tale intervallo la T_B è costante: $T_B = T_{Bml}$, allora $T_A \approx T_{Bml}$

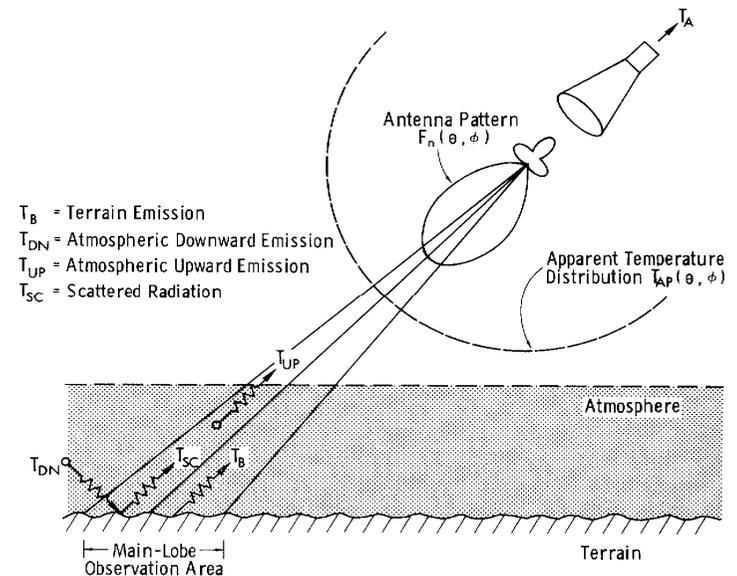


Radiometro

- Un radiometro è uno strumento costituito da un'antenna ricevente direttiva e un ricevitore. La finalità è quella di misurare la radiazione incidente sull'antenna a cui contribuiscono le sorgenti emissive collocate intorno all'antenna stessa, nonché i fenomeni di diffusione.
- A microonde la temperatura apparente di brillantezza T_{AP} (formalmente uguale ad una T_B) rappresenta la radiazione incidente sull'antenna, da ogni particolare direzione, a cui contribuiscono le diverse sorgenti dello scenario sotto osservazione:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} T_{AP}(\theta, \varphi) D(\theta, \varphi) d\Omega$$

Un'espressione per analitica per la T_{AP} è fornita dalla soluzione dell'equazione del trasferimento radiativo. Tale equazione *descrive la propagazione della radiazione elettromagnetica in un mezzo caratterizzato da una certa distribuzione di particelle con proprietà di emissione, assorbimento e diffusione (scattering) della radiazione stessa.*





SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Teoria del trasferimento radiativo

Sorgenti di rumore

- Possiamo distinguere le seguenti sorgenti di rumore (ovvero di emissione termica) non artificiali:
 - Celesti.
 - Terrestri.
 - Atmosferiche (aria chiara, nubi).
- Per le *sorgenti di rumore celesti*, la radiazione è dovuta principalmente a:
 - *Emissione cosmica*: consiste in una radiazione di fondo molto stabile e costante con la frequenza. La temperatura di brillantezza ad essa associata è circa 2.76 K.
 - *Emissione galattica*: consiste in radiazione emessa dai gas interstellari presenti nelle galassie. La temperatura di brillantezza decresce con la frequenza come $f^{-2.6}$ ed è trascurabile sopra i 5 GHz.
 - *Emissione da sorgenti puntiformi*: alcune sorgenti presenti nel cielo, come il sole, i pianeti e alcune stelle fortemente radiative verso la superficie terrestre possono essere considerate puntiformi, a causa dell'elevata distanza. Tali sorgenti producono un'apprezzabile aumento della temperatura d'antenna solo se viste all'interno del lobo principale.

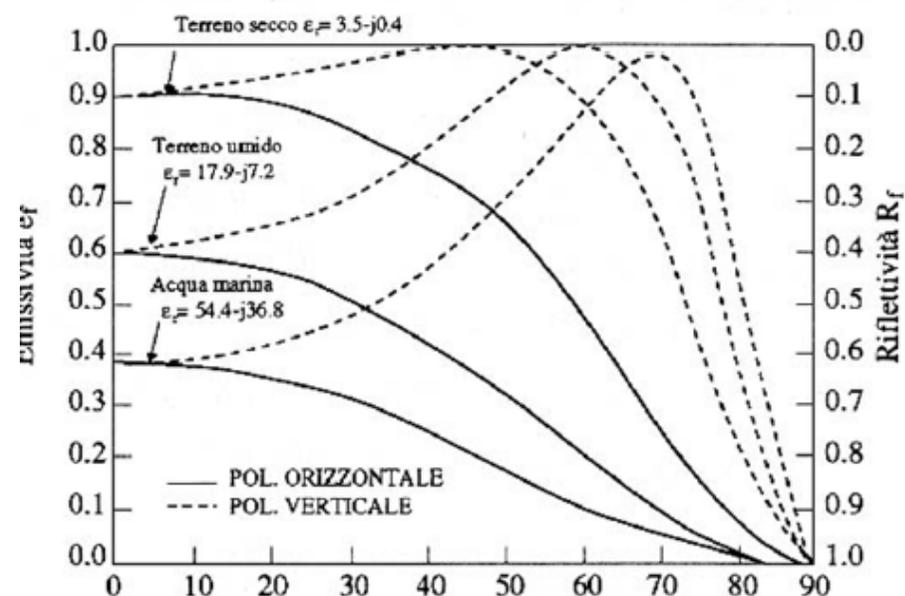
Sorgenti di rumore terrestri

- L'emissione delle superfici terrestre e marina dipendono da frequenza, direzione in cui è vista l'antenna, polarizzazione e dalle proprietà dielettriche. In figura sono riportate l'emissività (scala a sinistra) e la riflettività (scala a destra) in funzione dell'angolo θ (tra la direzione di emissione considerata e lo zenith) per $f=10$ GHz. La figura è valida per superfici lisce. Nei casi reali la rugosità del terreno, o il moto ondoso, tendono a ridurre il disadattamento tra semispazio superiore (aria) e semispazio inferiore (terreno o mare) con conseguente diminuzione di riflettività, ovvero aumento di emissività.

- L'emissione dalla superficie è importante in due casi.

1. Nelle antenne per ponti-radio o telecomunicazioni via-satellite produce un aumento della temperatura d'antenna a causa dell'emissione ricevuta dai lobi laterali.

2. Nelle antenne montate su satellite la superficie terrestre si presenta come una sorgente di emissione, vista all'interno di un angolo solido appartenente al lobo principale.



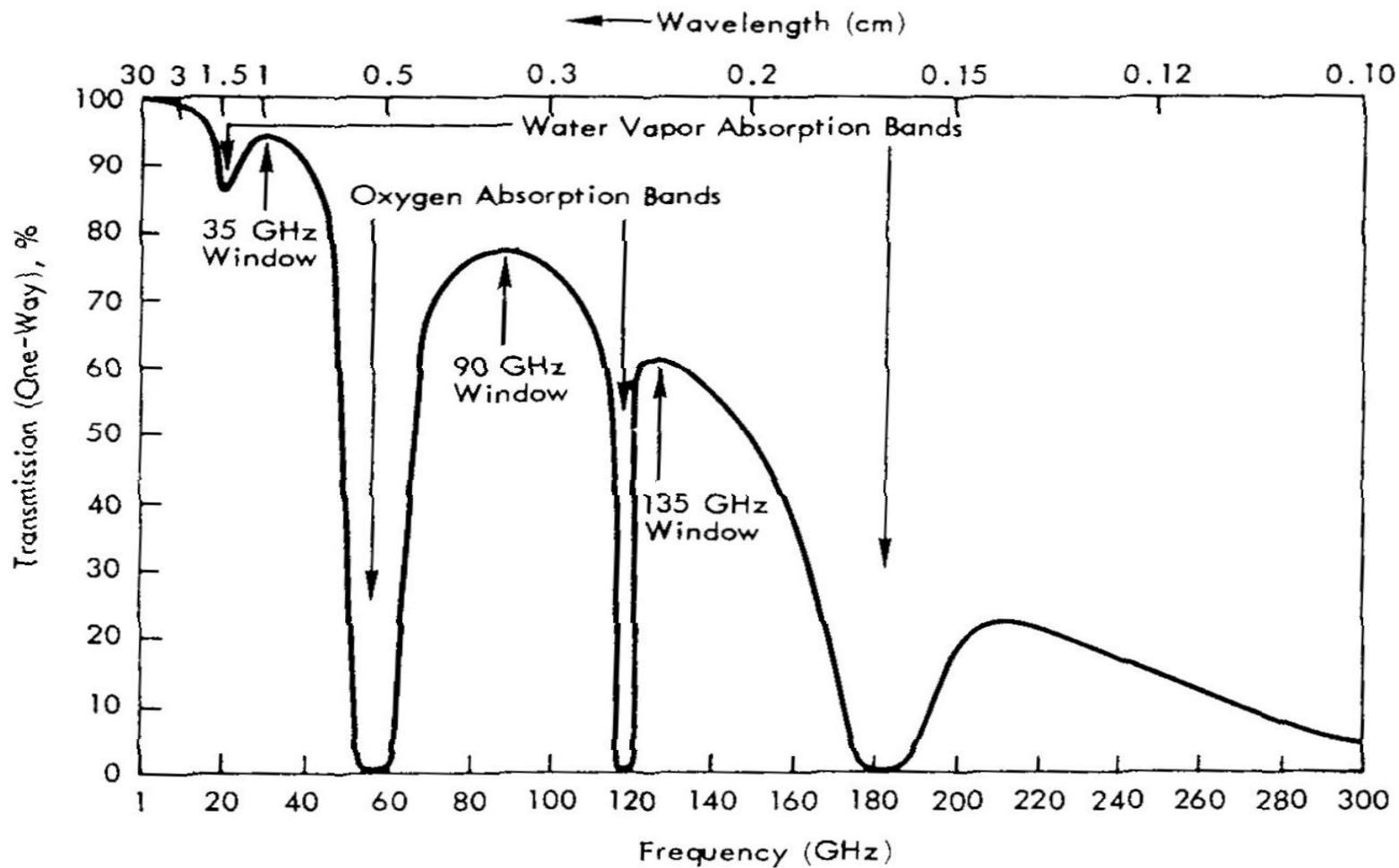
Sorgenti atmosferiche

- L'atmosfera, in assenza di idrometeore, *può essere descritta come uno strato assorbente con effetti di scattering trascurabili* (nello spettro radio). Per il principio di conservazione dell'energia, all'assorbimento corrisponderà anche l'emissione in condizioni di equilibrio termodinamico.
- Per quanto riguarda le nubi, *lo scattering può essere considerato trascurabile a microonde fino a frequenze molto alte (> 90GHz) in assenza di precipitazioni*. L'atmosfera con nubi non precipitative può quindi essere trattata anch'essa come uno strato assorbente.
- **Lo scattering è invece importante anche a frequenze relativamente basse per nubi con precipitazioni**. In questo caso l'atmosfera deve essere trattata come un mezzo in cui sono presenti particelle diffondenti distribuite in modo aleatorio (*mezzo statistico*).
- L'andamento spaziale dell'intensità della radiazione (descritta in termini di radianza o brillanza spettrale), propagantesi in un generico mezzo penetrabile che assorba, emetta e diffonda la radiazione stessa, quale può essere considerato l'atmosfera, è descritto dalla **teoria del trasferimento radiativo**.

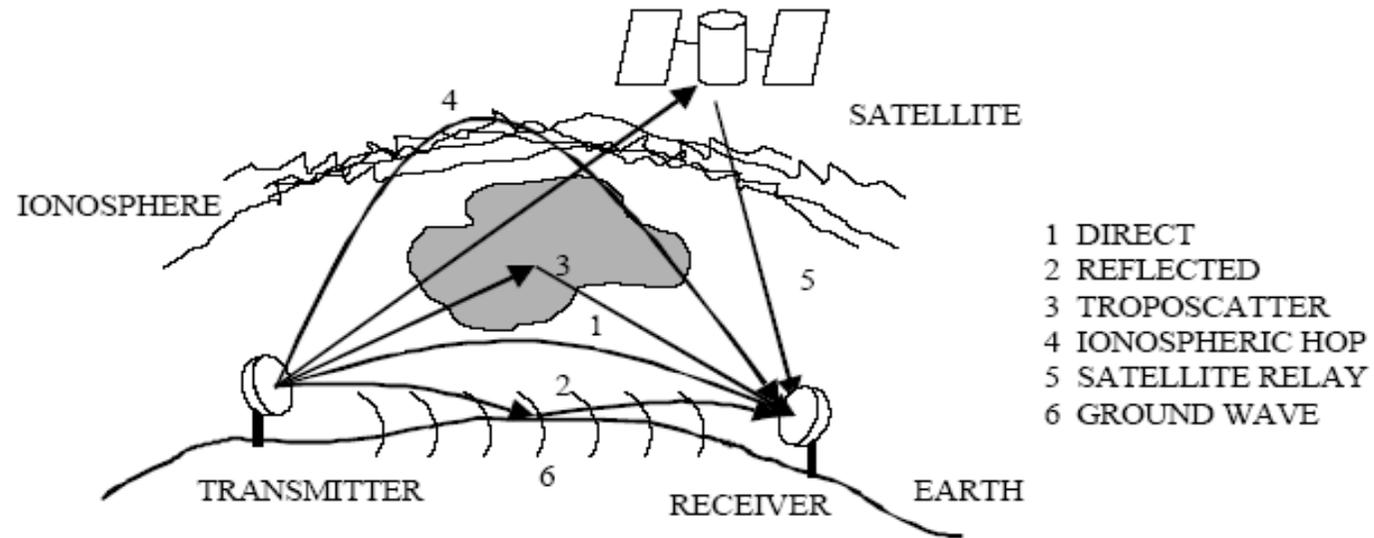
Interazione tra onde e.m. e materia a microonde

- La propagazione delle onde e.m. nell'atmosfera a μ onde per $f > 5-10$ GHz è controllata da:
 - fenomeni di assorbimento ed emissione dovuti a gas atmosferici ed all'acqua liquida delle nubi;
 - interazione con particelle diffondenti, precipitanti o sospese (idrometeore).
- Per i fenomeni di assorbimento ed emissione dei gas atmosferici, il *coefficiente di assorbimento atmosferico* descrive il processo di trasferimento di energia dall'onda e.m. alla molecola, che si porta a un livello energetico eccitato (livello energetico metastabile). La molecola può quindi tornare a un livello energetico inferiore e emettere energia sotto forma di onda e.m.. In condizioni di equilibrio termodinamico locale, si ha *uguaglianza del coefficiente di emissione con quello di assorbimento*.
 - Vapor d'acqua: linee spettrali di assorbimento 22.235 e 183.31 GHz e superiori.
 - Ossigeno: linee spettrali nell'intervallo fra 50 e 70 GHz (banda di assorbimento nota come il complesso dell'ossigeno a 60 GHz), linea a 118.75 GHz e superiori.
- Per *l'assorbimento e lo scattering dovuto ad idrometeore* i relativi coefficienti sono forniti da teorie di Mie e di Rayleigh.

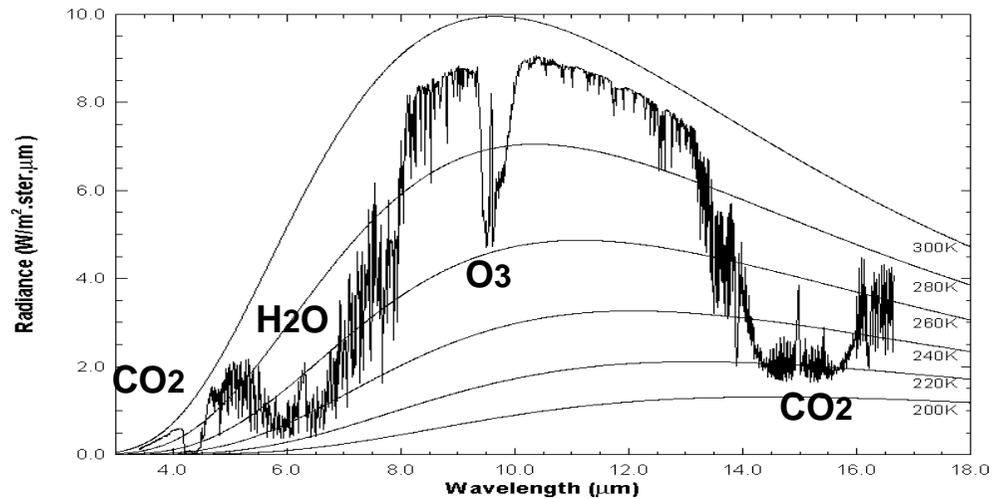
Assorbimento dovuto a vapor d'acqua ed ossigeno a microonde



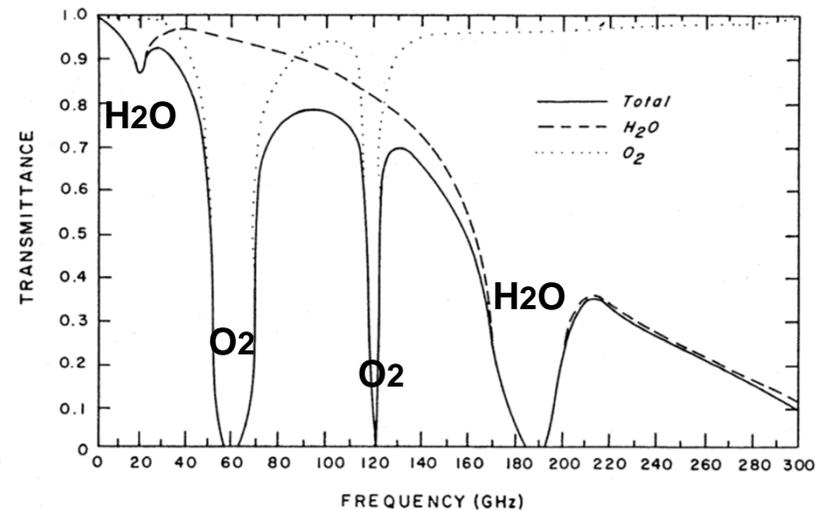
Effetti dell'atmosfera su onde e.m.



OPACITA' nel visibile-infrarosso



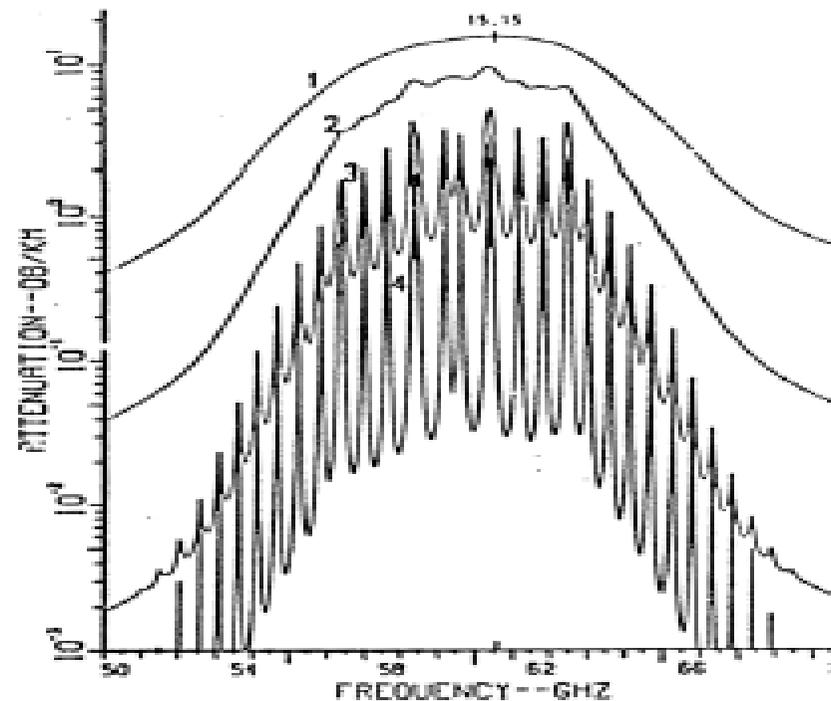
OPACITA' nelle microonde



Complesso dell'ossigeno a 60 GHz

- La polarizzabilità per deformazione è l'unica componente dovuta all'O₂ se siamo lontani dai picchi di assorbimento a 60 e 118 GHz. Questi ultimi sono invece dovuti ad *interazione con momento magnetico di spin*. L'O₂ possiede infatti un momento di dipolo magnetico intrinseco che ne rende possibile **linee di assorbimento puramente rotazionali** a 60 GHz e a 118.75 GHz.
- A 60 GHz il fenomeno è composito, dovuto cioè alla sovrapposizione di diverse righe adiacenti. A quote basse, l'allargamento collisionale confonde le righe in una unica banda.

Curve	h km
1	0
2	10
3	20
4	30

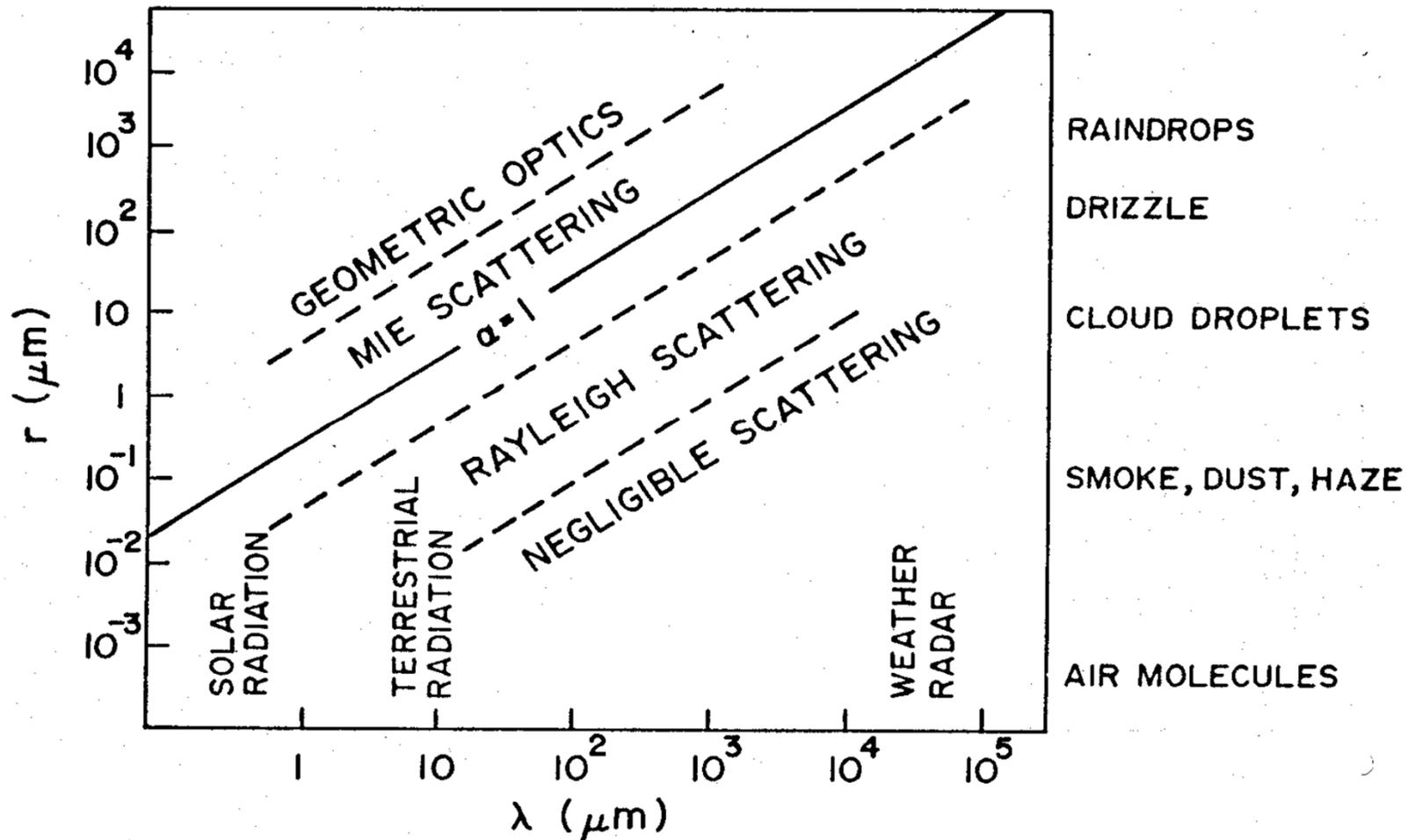


Scattering da particelle atmosferiche

- Le particelle atmosferiche (idrometeore ed aerosols) producono effetti di assorbimento e diffusione (scattering).
- Per i fenomeni di diffusione si distinguono:
 1. *Scattering di Raman*: la radiazione diffusa presenta uno **spostamento in frequenza**, rispetto alla radiazione incidente, caratteristico della molecola diffondente (scattering molecolare a frequenze ottiche)
 2. *Scattering di Mie*: fenomeno classico di scattering, con **frequenza dell'onda diffusa identica a quella dell'onda incidente** che si verifica quando le dimensioni delle particelle diffondenti sono dello stesso ordine di grandezza o maggiori della lunghezza d'onda.
 3. *Scattering di Rayleigh*: caso particolare dello scattering di Mie nel caso di **dimensioni delle particelle molto minori della lunghezza d'onda**. La sezione di cattura è proporzionale a λ^{-4}

Diffusione atmosferica e onde e.m.

Diffusione e.m. atmosferica



Teoria del trasferimento radiativo (1/2)

- La **teoria del trasferimento radiativo** (a differenza di quella analitica che si fonda sulle equazioni di Maxwell), parte direttamente dal trasporto di energia attraverso un mezzo contenente particelle dielettriche diffondenti disposte aleatoriamente.
- Gli effetti della polarizzazione delle onde e.m. e delle relazioni di fase si considerano di importanza secondaria rispetto allo studio del flusso di energia (formulazione scalare).
- Non viene assunta correlazione fra i contributi al campo elettromagnetico, e quindi si sommano le relative potenze.
- La teoria del trasferimento radiativo descrive l'andamento spaziale dell'intensità della radiazione (descritta in termini di **radianza o brillantezza**), che si propaga in un generico mezzo penetrabile che assorba, emetta e diffonda la radiazione stessa.
- La **brillantezza** (μonde) o **radianza** (IR) è la potenza istantanea che transita in una data direzione per unità di area ortogonale alla direzione di propagazione e per unità di angolo solido.

Teoria del trasferimento radiativo (2/2)

- Consideriamo un volume infinitesimo dV dissipativo e diffondente su cui incide la densità di potenza P_i . Siano dW_s la potenza diffusa dal volumetto, dW_a la potenza assorbita potenza estinta [W], $dW_e = dW_a + dW_s$.
- Nella formulazione della teoria del trasferimento radiativo si definiscono:
 - **coefficiente di assorbimento** k_a [m^{-1}]: descrive l'attenuazione della brillantezza dovuta all'assorbimento:

$$k_a(\vartheta_i, \varphi_i; p_i) = \frac{dW_a}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)} = \frac{dW_a}{dAdrP_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)} = \frac{dB_a}{drB_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)}$$

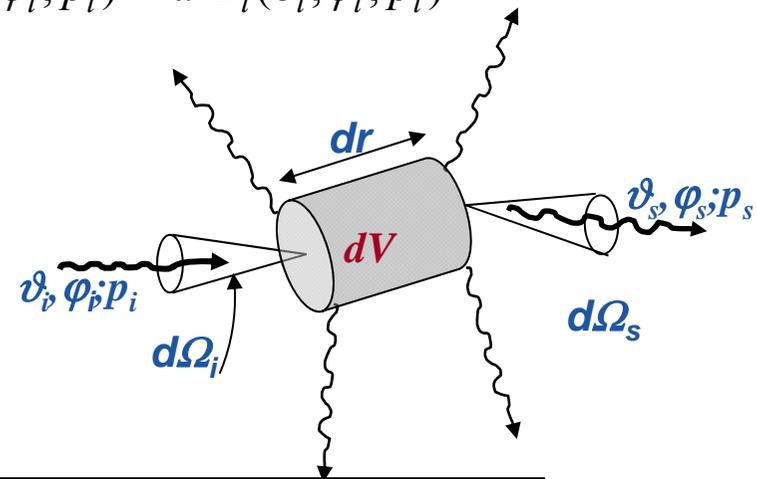
- **coefficiente di scattering** k_s [m^{-1}]: descrive l'attenuazione della brillantezza dovuta alla diffusione:

$$k_s(\vartheta_i, \varphi_i; p_i) = \frac{dW_s}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)} = \frac{dW_s}{dAdrP_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)} = \frac{dB_s}{drB_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)}$$

- **coefficiente di estinzione** k_e [m^{-1}]:

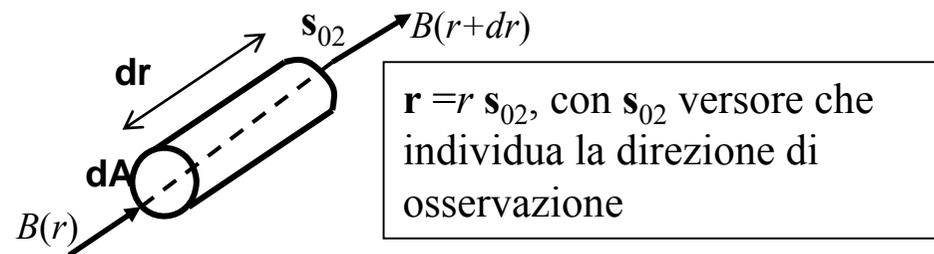
$$k_e = k_a + k_s.$$

$$k_e(\vartheta_i, \varphi_i; p_i) = \frac{dB_a + dB_s}{drB_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)} = \frac{dB_e}{drB_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)}$$



Equazione del trasferimento radiativo (ETR) (1/3)

Permette di ricavare l'espressione dell' incremento $dB(r)$ di brillantezza nella direzione di propagazione \mathbf{r} . Si considera un volumetto elementare di forma cilindrica, con asse diretto secondo \mathbf{r} , superficie di base dA e lunghezza dr



Dobbiamo considerare :

1. Incremento negativo (di *estinzione*) dovuto a assorbimento della radiazione da parte delle particelle del volumetto ed alla diffusione della radiazione in direzioni diverse da quella originale di propagazione: dB_e .
2. Incremento positivo dovuto al *recupero di scattering o multiple scattering*) ovvero radiazione dai volumetti circostanti reirradiata nella direzione considerata: $dB_{m\text{scat}}$.
3. Incremento positivo dovuto all'*emissione termica* in direzione \mathbf{r} : dB_{emis} .

Si ha:

$$dB = - dB_e + dB_{emis} + dB_{m\text{scat}}$$

ETR (2/3)

1. Decremento della brillantezza spettrale per **estinzione**

Dovuto al fatto che parte dell'energia entrante nel volumetto viene assorbita dal mezzo e parte viene diffusa, cioè deviata in direzioni diverse da quella originale di propagazione. E' dato da:

$$dB_e = k_e B(r) dr$$

2. Incremento della brillantezza dovuto a **recupero di scattering (multiple scattering)**

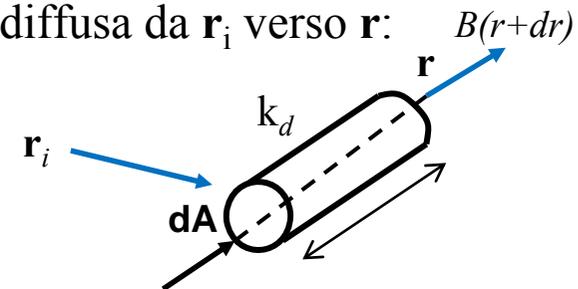
Una parte di energia associata a radiazione incidente sul volumetto elementare da direzioni diverse da quella di osservazione \mathbf{r} , (in figura consideriamo la generica direzione definita dal versore \mathbf{s}_{0i}) viene diffusa nella direzione di osservazione. Utilizzando una **funzione di sorgente $J_{m\text{scat}}$** si ha:

$$dB_{m\text{scat}} = k_s J_{m\text{scat}} dr$$

Per esprimere $J_{m\text{scat}}$ si devono considerare i contributi provenienti da tutte le possibili direzioni e quindi si deve integrare nell'angolo solido la brillantezza incidente dalla generica direzione $\mathbf{r}_i = r_i \mathbf{s}_{0i}$, pesata con il **coefficiente di diffusione differenziale $k_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$** che fornisce la porzione di energia diffusa da \mathbf{r}_i verso \mathbf{r} :

$$dJ_{m\text{scat}} = \frac{1}{k_s} B(\mathbf{r}_i) k_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Omega$$

$$J_{m\text{scat}} = \frac{1}{k_s} \int_{4\pi} B(\mathbf{r}_i) k_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Omega$$



ETR (3/3)

3. Incremento della brillantezza dovuto ad **emissione termica**

La parte assorbita dell'energia tende a far aumentare la temperatura del volumetto. Per mantenersi in equilibrio termico con l'ambiente circostante, esso dovrà emettere la stessa quantità di energia che ha assorbito. Nelle suddette condizioni di equilibrio termico, il bilancio energetico conduce alla *legge di Kirckhoff di uguaglianza fra emissione termica e assorbimento*. Si ha quindi:

$$dB_{emis} = e B_{CN} = k_a dr J_{CN}$$

J_a : funzione di sorgente per l'emissione termica che coincide con la brillantezza del corpo nero (B_{CN}) data dalla legge di Planck: $J_{CN} = B_{CN}$

- L'ETR in forma differenziale è quindi:

$$dB = -k_e B dr + k_a J_a dr + k_s J_{mscat} dr$$

- Definendo l'albedo: $w = k_s / k_e$ e la **funzione di sorgente totale** $J = w J_{mscat} + (1-w) J_{CN}$ si ha l'equazione integro-differenziale del trasferimento radiativo:

$$\frac{dB(r)}{dr} = -k_e B(r) + k_e J(r) = -k_e B(r) + w J_{mscat}(r) + (1-w) J_{CN}$$

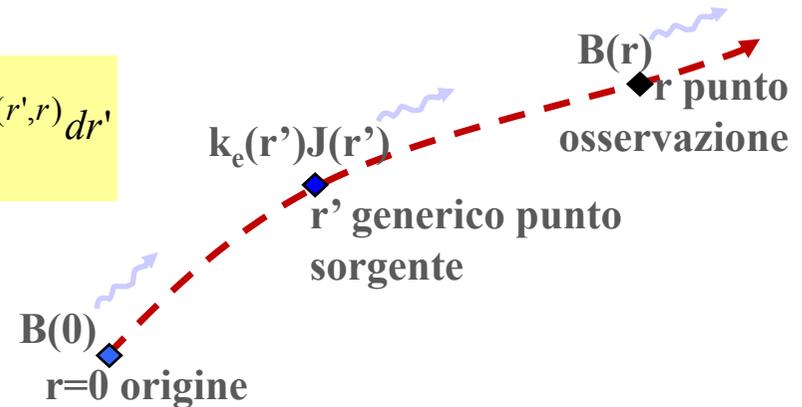
Forma integrale di ETR (o RTE)

Definito lo **spessore ottico** dal punto di coordinata curvilinea r_1 al punto r_2 :

$$\tau(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} k_e dr$$

Si ricava la **Radiative Transfer Equation (RTE)** in forma integrale (si noti presenza incognita B nella funzione di sorgente nell'integrale) :

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',r)} dr'$$



Dimostrazione:

$$\frac{dB(r')}{d\tau} e^{\tau(0,r')} + B(r')e^{\tau(0,r')} = J(r')e^{\tau(0,r')} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} [B(r')e^{\tau(0,r')}] = J(r')e^{\tau(0,r')}$$

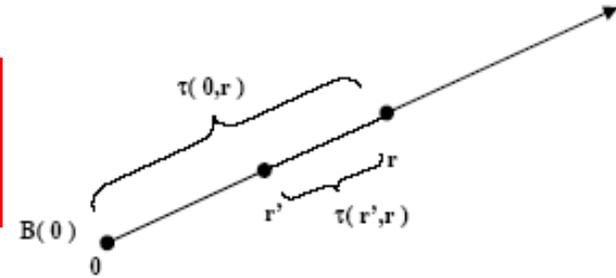
$$d[B(r')e^{\tau(0,r')}] = k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr \quad \Rightarrow \quad B(r')e^{\tau(0,r')} \Big|_0^r = \int_0^r k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr$$

$$B(r)e^{\tau(0,r)} - B(0)e^{\tau(0,0)} = \int_0^r k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr \quad \Rightarrow \quad B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',0)}e^{-\tau(0,r)} dr$$

Soluzione dell'ETR

L'equazione $dB/dr = -k_e B + k_e J$ ha per soluzione (interpretando $k_e J$ come termine noto):

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',r)} dr'$$



$\tau(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} k_e dr$ è lo *spessore ottico* tra r_1 ed r_2 ; $t(r_1, r_2) = e^{-\tau(r_1, r_2)}$ è la *trasmissione*

$B(0)e^{-\tau(0,r)}$ Rappresenta la brillantezza nel punto di sorgente attenuata per l'estinzione prodotta dal mezzo attraversato

$\int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',r)} dr$ Rappresenta la somma di infiniti contributi del mezzo (sorgente di emissione termica e recupero di scattering) prodotti dal generico strato infinitesimo di spessore dr' , ognuno attenuato per l'estinzione relativa al percorso tra il punto di sorgente r' e il punto di osservazione r

Nella banda delle microonde al posto della brillantezza si può usare la temperatura di brillantezza (approssimazione di Rayleigh-Jeans):

$$B_f = (2K_B/\lambda^2) eT = (2K_B/\lambda^2) T_B \rightarrow T_B = eT \quad [e: \text{emissività}]$$

Temperatura apparente di brillantezza (T_{AP})

- La temperatura di brillantezza osservata (anche detta APparente: T_{AP}) nel punto r è fornita dalla soluzione dell'eq. del trasferimento radiativo:

$$T_{AP}(r) = T_B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')[(1-w)T(r') + wT_{SC}(r')]e^{-\tau(r',r)} dr'$$

dove le funzioni di sorgente alle microonde sono:

$$J_{CN} = (2K_B/\lambda^2) T\Delta f, \quad J_{mscat} = (2K_B/\lambda^2) T_{SC}\Delta f$$

$$\text{ed inoltre: } T_{SC} = (1/k_s) \int_{4\pi} T_{AP}(\mathbf{r}_i) k_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Omega$$

- Nel caso di atmosfera non diffondente ($w \approx 0$, $k_e \approx k_a$), ovvero di atmosfera chiara alle μ onde, si ottiene:

$$\begin{aligned} T_{AP}(r) &= T_B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_a(r')T(r')e^{-\tau(r',r)} dr' = \\ &= T_{B0}e^{-\tau(0,r)} + T_{ATM}(r) \end{aligned}$$

Strato assorbente omogeneo isoterma

Consideriamo strato omogeneo e isoterma (parametri interazione e temperatura costanti) non diffondente di spessore H. La brillantezza generata dallo strato ($B(0)=0$)

$$B(r) = \int_0^H k_a(r') J_a(r') e^{-\int_{r'}^H k_a(r'') dr''} dr' = \int_0^H k_a J_a e^{k_a(r'-H)} dr' = J_a e^{-k_a H} \int_0^H e^{k_a r'} d(k_a r') =$$

$$B(r) = J_a e^{-k_a H} \left[e^{k_a r'} \right]_{r'=0}^{r'=H} = J_a e^{-k_a H} \left[e^{k_a H} - 1 \right] = J_a \left[1 - e^{-k_a H} \right] \quad B(r) = J_a [1 - t]$$

La radianza prodotta dallo strato è pari a quella di un corpo nero alla stessa temperatura per 1 meno la trasmittanza t dello strato.

Alle microonde la T_B dello strato a temperatura T:

$$T_B(r) = T \left[1 - e^{-k_a H} \right] = T [1 - t]$$

Strato trasparente $t=1$, $T_B=0$. Strato con elevato spessore ottico τ , infinitamente spesso ($H \rightarrow \infty$) o molto assorbente ($k_a \rightarrow \infty$) risulta $t \rightarrow 0$ e quindi $T_B=T$, temperatura fisica

Temperatura media radiativa di uno strato qualsiasi: temperatura dello strato omogeneo isoterma equivalente

$$T_B(r) = \frac{\int_0^H k_a(r') T(r') e^{-\tau(r',H)} dr'}{\int_0^H k_a(r') e^{-\tau(r',H)} dr'} = \frac{\int_0^H k_a(r') e^{\tau(H,r')} dr'}{\int_0^H k_a(r') e^{\tau(H,r')} dr'} = T_m \int_0^H e^{\tau(H,r')} d\tau = T_m \left[e^{\tau(H,r')} \right]_{\tau(H,0)}^{\tau(H,H)} = T_m \left[1 - e^{-\tau(0,H)} \right]$$

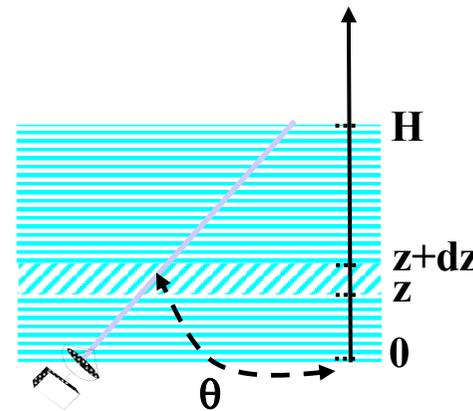
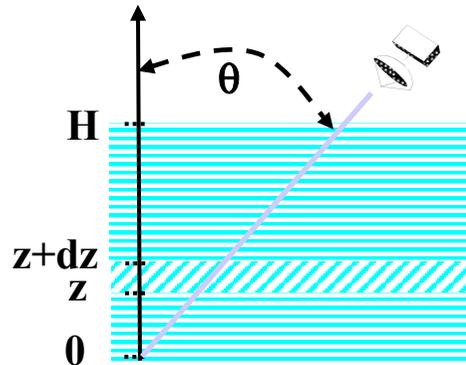
Brillanza di strato non diffondente piano-parallelo

Strato (atmosferico) piano-parallelo ovvero parametri di interazione dipendono solo dalla quota z : $k_a(\underline{r})=k_a(z)$, $k_e(\underline{r})=k_e(z)$, $w(\underline{r})=w(z)$.
 Strato non diffondente ($w=0$) di spessore H . Percorso obliquo inclinato θ rispetto verticale lungo r

$$r' = \frac{z'}{\cos \vartheta} = z' \sec \vartheta \quad dr' = dz' \sec \vartheta$$

$$r = H \sec \theta$$

$$\tau(z', H) = \int_{z'}^H k_e(z) dz$$



Temperatura di brillantezza verso l'alto (UP) per emissione/assorbimento strato osservato in direzione θ alla quota H

$$B(r) = B_{UP}(\vartheta; H) = \int_0^r k_a(r') J_a(r') e^{-\tau(r', r)} dr'$$

$$B_{UP}(\vartheta; H) = \sec \vartheta \int_0^H k_a(z') J_a(z') e^{-\tau(z', H) \sec \vartheta} dz'$$

Temperatura di brillantezza verso il basso (DOWN) strato osservato in direzione θ alla quota 0

$$B_{DN}(\vartheta) = \sec \vartheta \int_0^H k_a(z') J_a(z') e^{-\tau(0, z') \sec \vartheta} dz'$$

Osservazione radiometrica dall'alto

Nell' ipotesi di atmosfera non diffondente, la T_{AP} è data da 3 contributi:

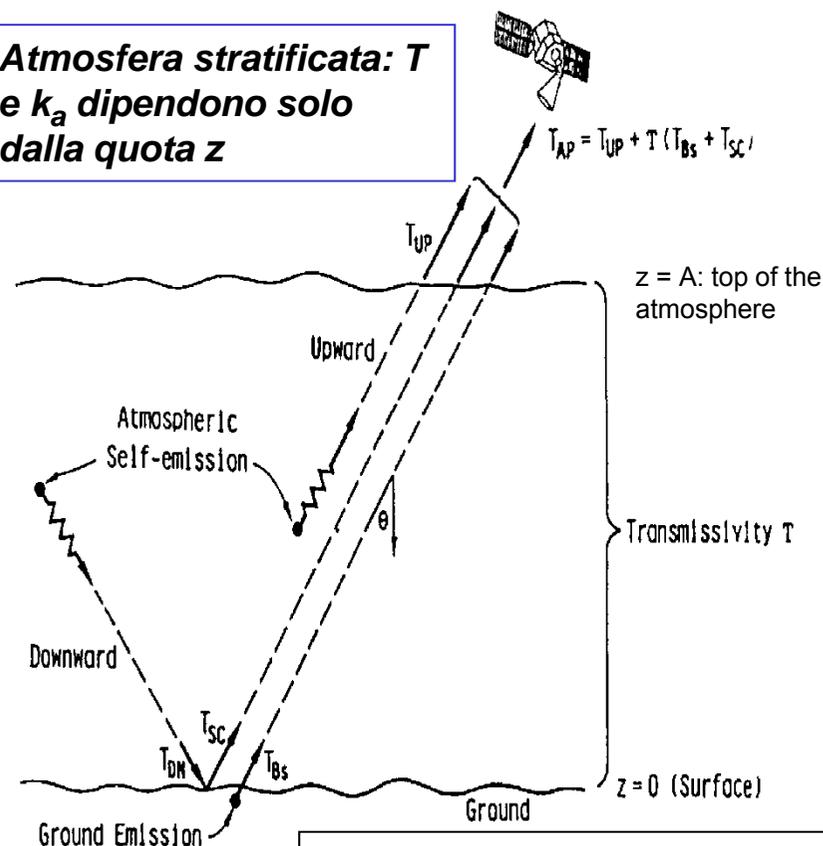
- la brillantezza emessa dall'atmosfera verso l'alto T_{UP}
- la brillantezza emessa dall'atmosfera verso il basso T_{DN} , diffusa dalla superficie (terra o mare) e attenuata dall'atmosfera stessa
- la brillantezza emessa dalla superficie T_{Bs} ed attenuata dall'atmosfera

$$T_{UP} = \frac{1}{\mu} \int_0^A T(z') \cdot k_a(z') \cdot e^{-\tau(z',A)/\mu} \cdot dz'$$

$$T_{DN} = \frac{1}{\mu} \int_0^A T(z') \cdot k_a(z') \cdot e^{-\tau(0,z')/\mu} dz'$$

$$T_{AP} = e_{srf} T_{srf} e^{-\tau(0,A)/\mu} + T_{DN}(1 - e_{srf}) e^{-\tau(0,A)/\mu} + T_{UP}$$

Atmosfera stratificata: T e k_a dipendono solo dalla quota z



$$T_{Bsrf} = e_{srf} T_{srf}$$

$\mu = \cos \theta$

T_s : temperatura superficiale

e_{srf} : emissività superficiale

Sia e_{srf} che k_a dipendono dalla frequenza

Esempi di osservazione radiometrica dall'alto

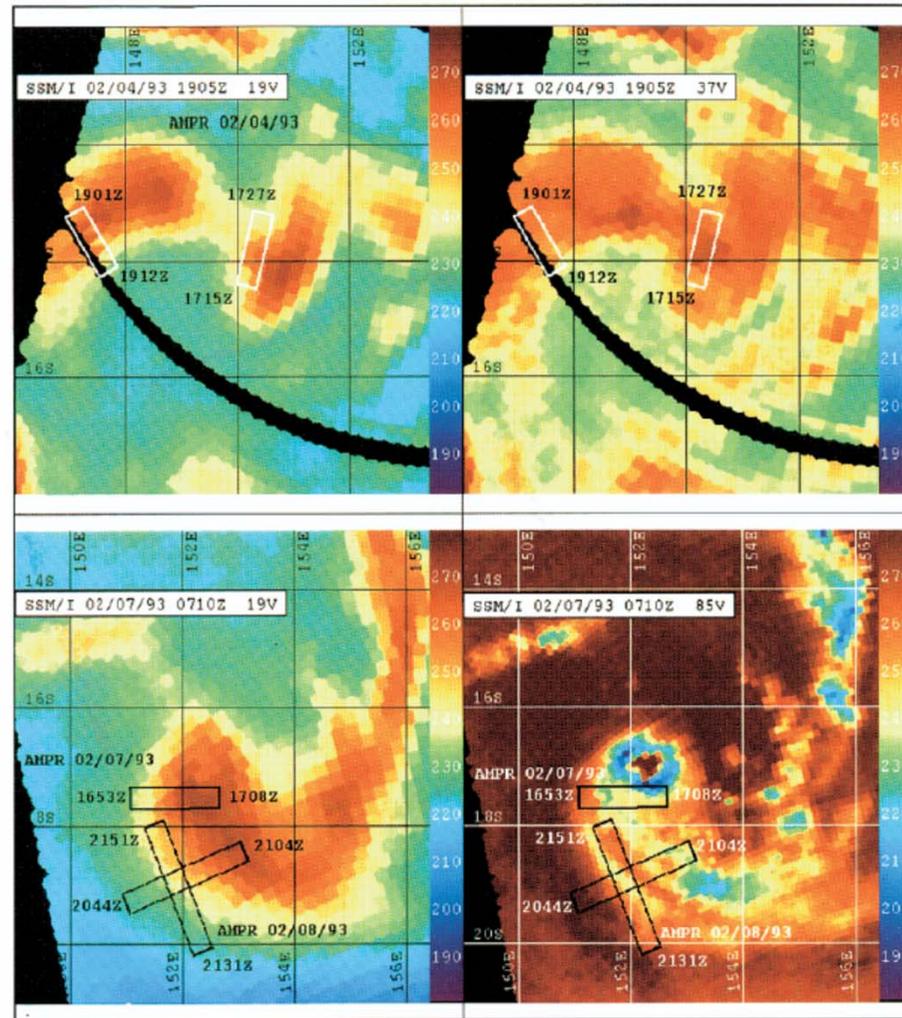
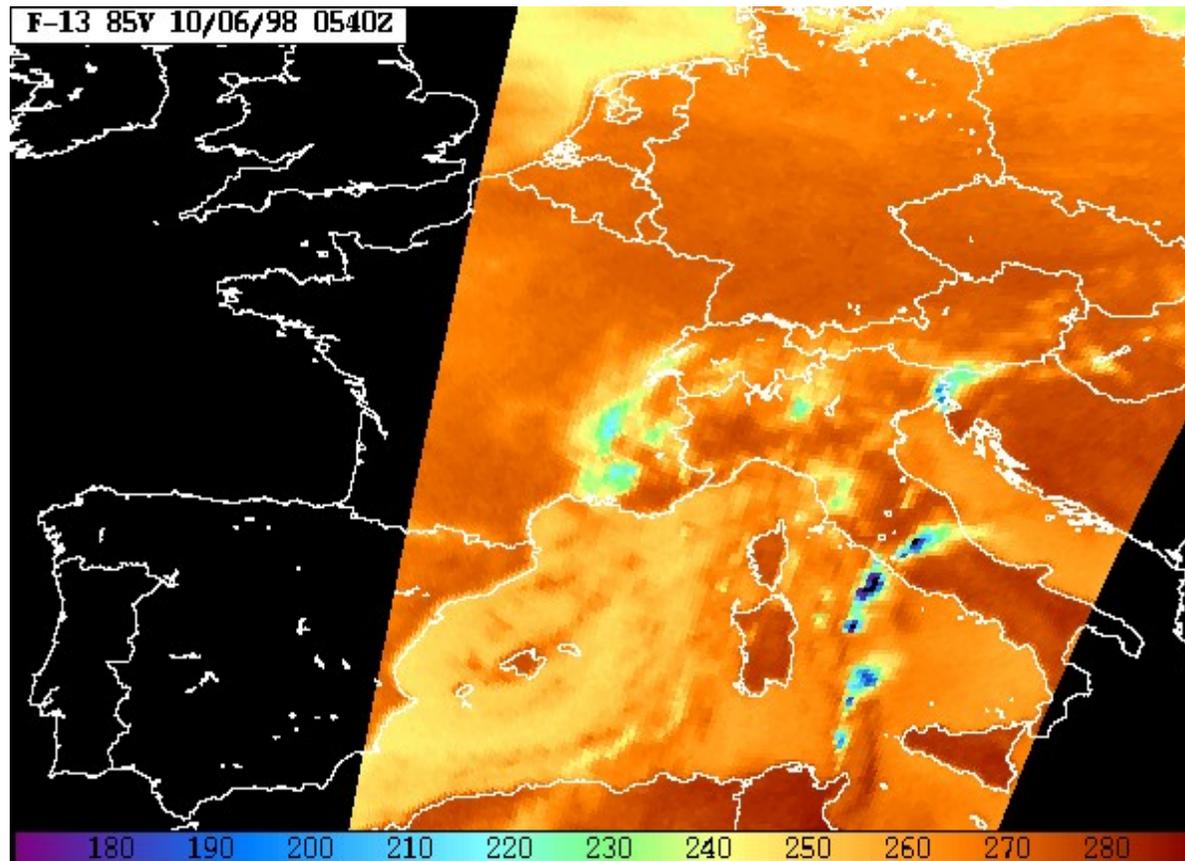


FIG. 2. Upper two panels: 19- and 37-GHz SSM/I T_8 imagery from the 1905 UTC *F-11* DMSP pass on 4 February 1993, remapped into a rectangular projection near the forming stages of Cyclone Oliver. AMPR on-earth scan coverage regions from two ER-2 overflights on 4 February are overlaid. The black band indicates missing scan lines from the SSM/I. Lower panels: 19- and 85-GHz SSM/I T_8 imagery from the 0710 UTC *F-11* DMSP pass on 7 February 1993, remapped into a rectangular projection over the mature stage of Cyclone Oliver. AMPR on-earth scan coverage regions from one ER-2 overflight on 7 February and two from 8 February are overlaid. The color table values are all in degrees K.

SATELLITE METEOROLOGY

Case study by MW radiometry

SSM/I 85-GHz radiance image [K]



October 6, 1998

Esempio: osservazione radiometrica dall'alto (radiometro spaziale)

$$T_{AP-pol} = e_{srfpol} T_S e^{(-\tau(0,h)/\mu)} + T_{DN}(1 - e_{srfpol}) e^{[-\tau(0,h)/\mu]} + T_{UP}$$

con $T_{ATM} = T_{DN} (1 - e_{srf}) \exp[-\tau(0,h)/\mu] + T_{UP}$
 $T_{DN} = T_0 (1 - \exp[-\tau(0,h)/\mu])$ se strato omogeneo

Caso su satellite LEO del radiometro SSM/I (7 canali: 19, 37 ed 85 GHz polarizzazioni H e V, 22 GHz solo polarizzazione V)

Supponiamo il seguente scenario per strato quasi-omogeneo ($T_{UP} \neq T_{DN}$):

$$T_S = 286.5 \text{ K}, T_{UP} = 28.83 \text{ K}, T_{DN} = 29.18 \text{ K}, \quad \tau = 0.07$$
$$\mu = \cos(53^\circ) = 0.602 \rightarrow \exp(-\tau/\mu) = 0.890$$

Consideriamo il canale 37 H e supponiamo $e_{srfH} = 0.36$ (mare):

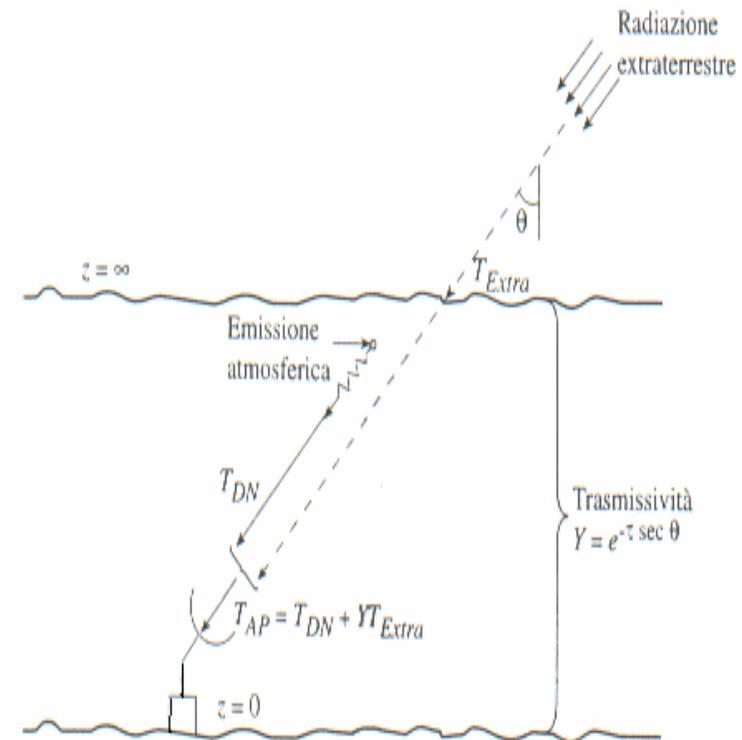
$$T_{AP-H} = 0.36 \cdot 286.5 \cdot 0.890 + 29.18 \cdot (1 - 0.36) \cdot 0.890 + 28.83 =$$
$$= 91.79 + 16.62 + 28.83 = 137.24 \text{ K}$$

Consideriamo il canale 37 V e supponiamo $e_{srfV} = 0.65$ (mare)

$$T_{AP-V} = 0.65 \cdot 286.5 \cdot 0.890 + 29.18 \cdot (1 - 0.65) \cdot 0.890 + 28.83 =$$
$$= 165.74 + 9.09 + 28.83 = 203.66 \text{ K}$$

Osservazione radiometrica dal basso

- $T_{AP} = T_{DN} + T_{EXTRA} t$
- $T_{EXTRA} = T_{cos} + T_{Gal} =$ radiazione di origine extraterrestre
- $T_{cos} = 2.7$ K: radiazione di sfondo cosmico (indipendente da f e θ)
- $T_{Gal} =$ radiazione originata dalla nostra galassia (dipende da θ e decresce con f fino a risultare trascurabile al di sopra dei 5 GHz)
- $t = e^{-\tau(0, \infty)}$ trasmittanza dell'intero percorso atmosferico



Osservazione radiometrica da terra.

Osservazioni radiometriche da terra possono essere usate nelle stazioni di terra per telecomunicazioni via satellite, per stimare l'attenuazione.

TEST CASE STUDY

ITALSAT station near Rome

ITALSAT beacon receiving station



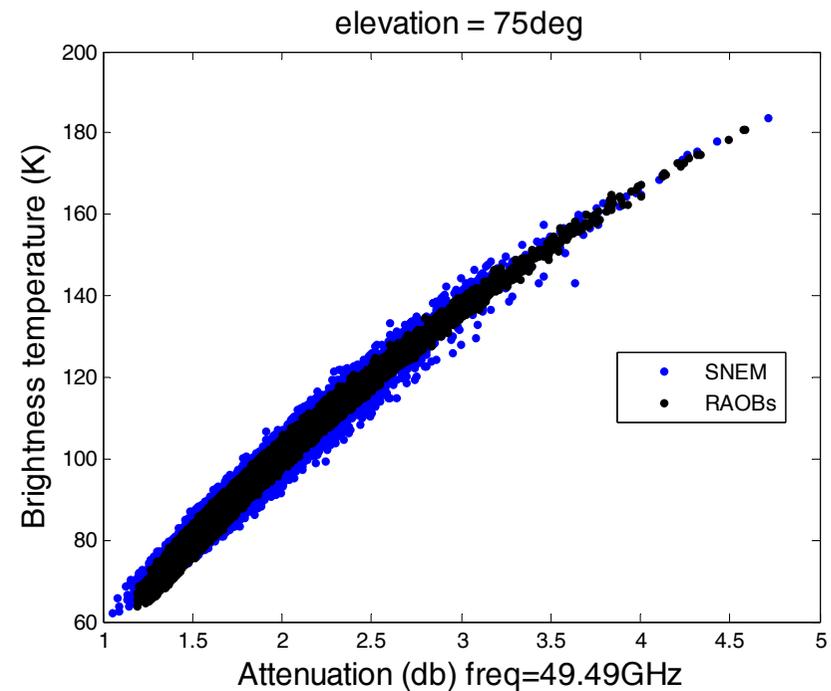
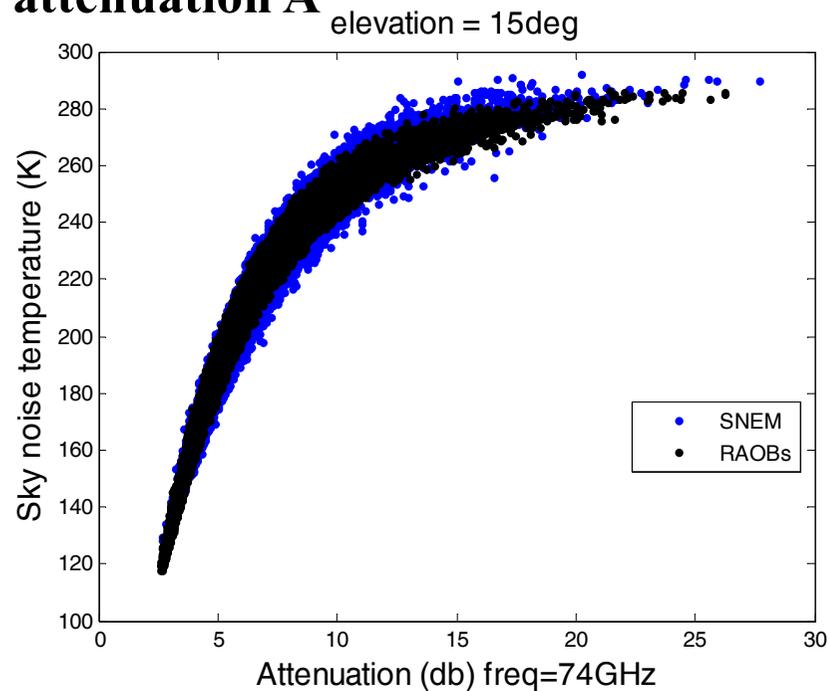
RESCOM-1 radiometer at 13 GHz



TEST CASE STUDY

ITALSAT station near Rome Clear air intercomparison

Comparison between SNEM simulations at 15° and 75° elevation, due to clear-air gases and clear-air TB from RAOBs in terms of TB and path attenuation **A**



Esempio: osservazione radiometrica da terra (radiometro terrestre)

$$T_{AP-pol} = T_{DN} + T_{EXTRA} \exp[-\tau (0,h) / \mu]$$

con $T_{DN} = T_0 (1 - \exp[-\tau (0,h) / \mu])$ se strato omogeneo

Caso del radiometro da terra a 37 con polarizzazione H e V.

Supponiamo lo scenario seguente per strato omogeneo isotropo:

$$T_{DN} = 29.18 \text{ K}, \quad \tau = 0.07$$

$$\mu = \cos(53^\circ) = 0.602 \rightarrow \exp(-\tau/\mu) = 0.890$$

In polarizzazione H

$$T_{AP-H} = 29.18 + 2.73 \cdot 0.890 = 29.18 + 2.43 = 31.61 \text{ K}$$

In polarizzazione V

$$T_{AP-V} = 29.18 + 2.73 \cdot 0.890 = 29.18 + 2.43 = 31.61 \text{ K}$$

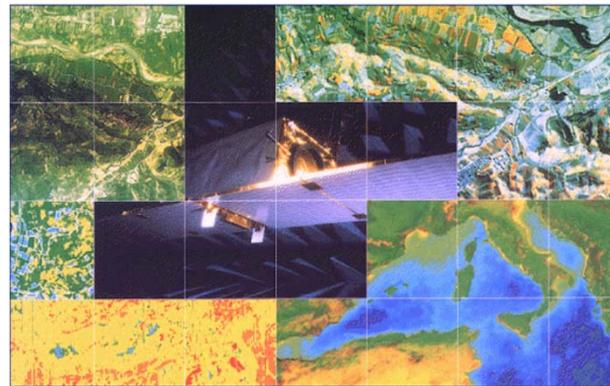
NOTE:

- Il contributo T_{DN} e T_{EXTRA} non mostrano polarizzazione in quanto gas e nubi non irradiano in modo differente in H e V.
- Solo l'eventuale presenza di pioggia con gocce oblate può creare diversità di polarizzazione nell'emissione atmosferica a microonde.



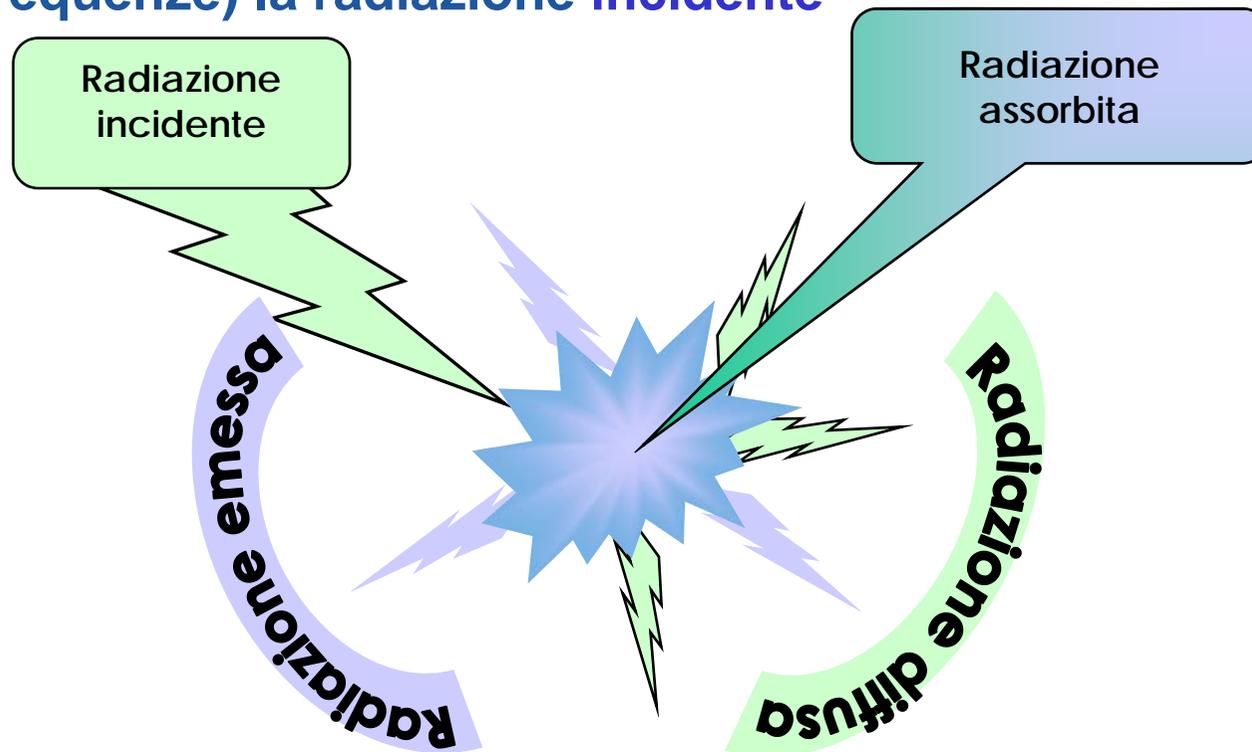
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Approfondimenti di Teoria del trasferimento radiativo



Assorbimento, diffusione, emissione

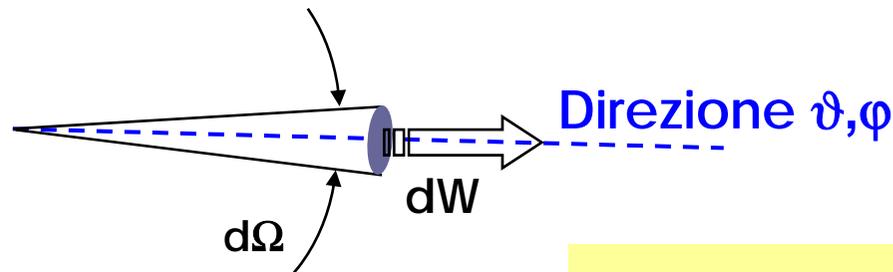
Un corpo (o superficie) in parte **assorbe** (trasforma in calore) ed in parte **diffonde** (reirradia in diverse direzioni e frequenze) la radiazione incidente



Inoltre esso **emette** in relazione alla sua temperatura ed emissività

Intensità radiante

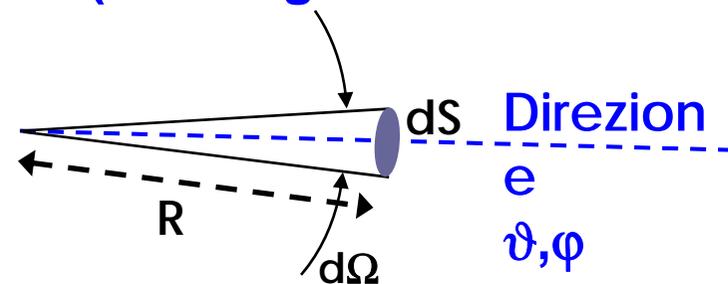
Intensità radiante I (o diagramma di radiazione in potenza \wp):
potenza irradiata nell'unità di angolo solido intorno ad una
determinata direzione (ϑ, φ) da una sorgente (trasmettitore)
puntiforme [Watt ster⁻²] (funzione di direzione)



$$I(\vartheta, \varphi) = \wp(\vartheta, \varphi) = \frac{dW}{d\Omega} \quad [\text{Watt ster}^{-2}]$$

Nota: ricordiamo definizione angolo solido Ω e suo
differenziale in coord. polari (dS ortogonale a
direzione ϑ, φ)

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

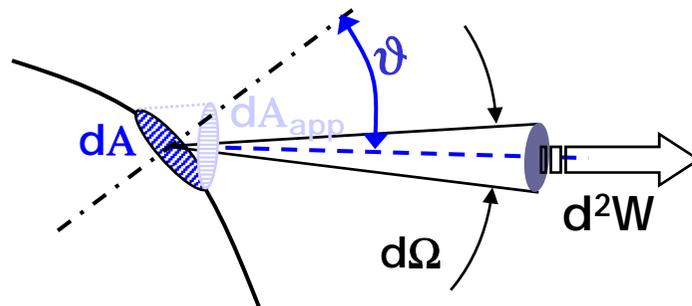


Radianza e radianza spettrale

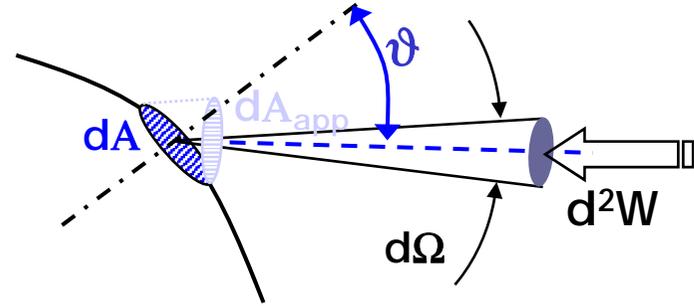
Radianza L (o brillantezza B): potenza ricevuta (o irradiata) nell'unità di angolo solido e di superficie apparente (vs direzione) [Watt sr⁻¹ m⁻²]

Radianza spettrale (o brillantezza spettrale): potenza ricevuta o radiata nell'unità angolo solido, di superficie apparente e di intervallo di lung. d'onda (B_λ oppure L_λ) o frequenza (B_f oppure L_f) (vs λ , f e direzione) [Watt sr⁻¹ m⁻² μm^{-1} o Watt sr⁻¹ m⁻² Hz⁻¹]

$$L_\lambda(\vartheta, \varphi) = B_\lambda(\vartheta, \varphi) = \frac{d^2W}{d\Omega dA_{app} d\lambda} = \frac{d^2W}{d\Omega dA \cos \vartheta d\lambda}$$



Superficie trasmittente



Superficie ricevente

Legame radianza e densità flussi radianti

L'irradianza su una superficie dA dall'angolo

$d\Omega_r$:

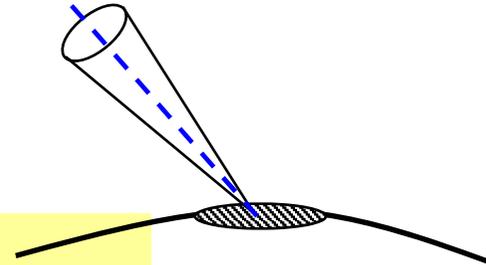
$$L(\vartheta_r, \varphi_r) = \frac{d^2W_i}{d\Omega_r dA \cos \vartheta_r} \Rightarrow dE = \frac{d^2W_i}{dA} = L(\vartheta_r, \varphi_r) \cos \vartheta_r d\Omega_r$$

L'irradianza da tutto il semispazio superiore:

$$E = \int_{2\pi, \Omega_t} L(\vartheta_r, \varphi_r) \cos \vartheta_r d\Omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} L(\vartheta_r, \varphi_r) \cos \vartheta_r \sin \vartheta_r d\vartheta_r d\varphi_r$$

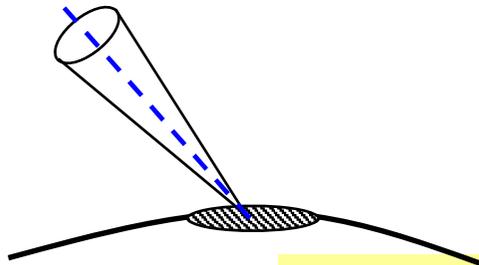
ΔW_i incidente

ϑ_r, φ_r



ΔW_t irradiata

ϑ_t, φ_t



Analogamente, l'eccitanza da una superficie dall'angolo $d\Omega_t$:

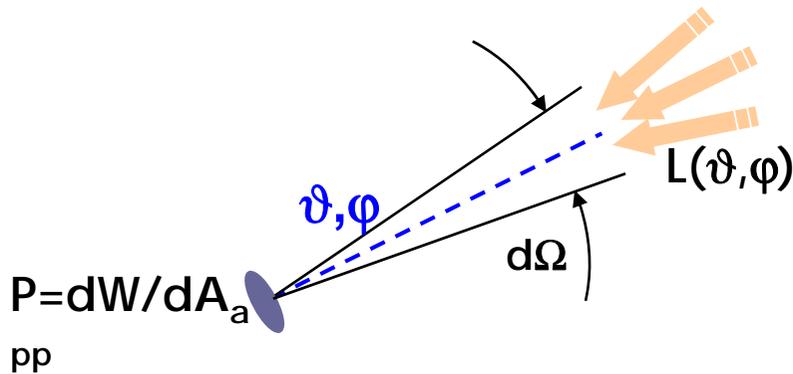
$$dM = \frac{d^2W_t}{dA} = L(\vartheta_t, \varphi_t) \cos \vartheta_t d\Omega$$

L'eccitanza verso il semispazio superiore:

$$M = \int_{2\pi} L(\vartheta_t, \varphi_t) \cos \vartheta_t d\Omega = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} L(\vartheta_t, \varphi_t) \cos \vartheta_t \sin \vartheta_t d\vartheta_t d\varphi_t$$

Legame densità flussi e vettore Poynting

Densità flusso radiante per unità superficie ortogonale da/in $d\Omega$ intorno ϑ, φ [=intensità vettore Poynting $P(\vartheta, \varphi)$ risultante da somma di tutti i contributi dello spettro di onde in $d\Omega$]:

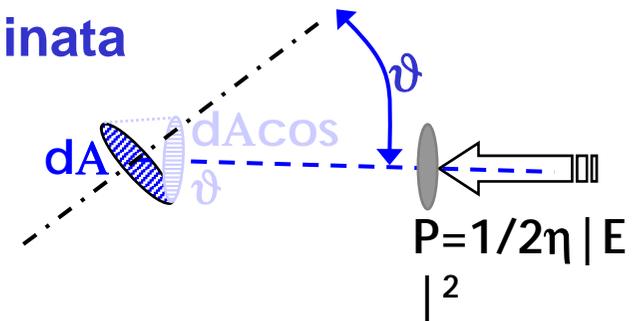


$$L(\vartheta, \varphi) = \frac{d^2W}{d\Omega dA_{app}} = \frac{dP(\vartheta, \varphi)}{d\Omega} \Rightarrow$$

$$dP(\vartheta, \varphi) = L(\vartheta, \varphi) \cdot d\Omega$$

Densità flusso radiante su/da dA determinata da un'onda piana con intensità vettore Poynting P :

$$E(M) = \frac{d^2W}{dA} = \frac{P \cdot dA \cdot \cos \vartheta}{dA} = P \cdot \cos \vartheta$$



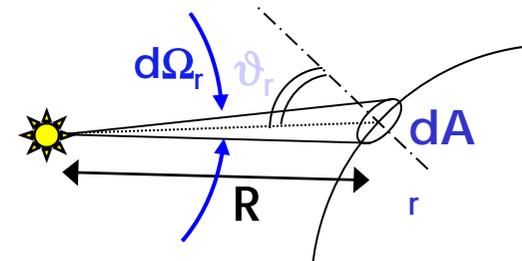
Legge dell'inverso del quadrato di R

Sorgente (trasmettitore) puntiforme

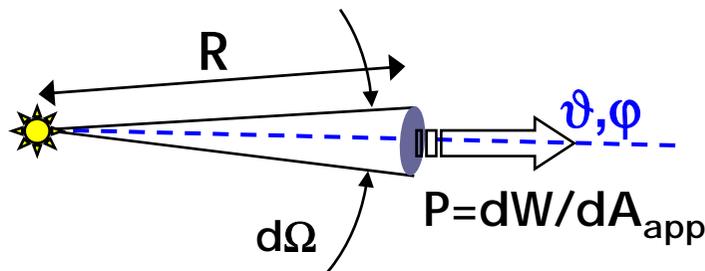
L'irradianza su una superficie determinata da sorgente puntiforme con intensità $I(\vartheta, \varphi)$ a distanza R (notare dipendenza da $1/R^2$):

$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{dW_i}{d\Omega_r} = \frac{dW_i}{dA_r \cos \vartheta_r / R^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{dW_i}{dA_r} = \frac{I(\vartheta, \varphi)}{R^2} \cos \vartheta_r$$



ANALOGAMENTE: densità potenza per unità superficie ortogonale (=intensità vettore Poynting) determinata da sorgente puntiforme con intensità $I(\vartheta, \varphi)$ a distanza R (notare dipendenza da $1/R^2$):

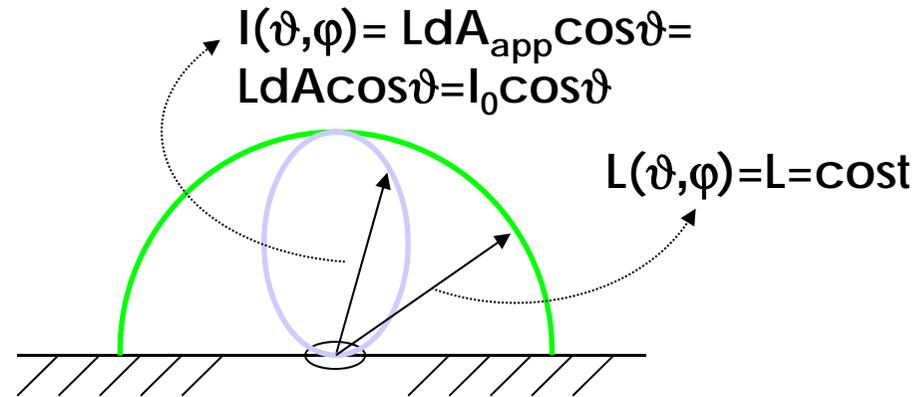


$$I(\vartheta, \varphi) = \frac{dW}{d\Omega} = \frac{R^2 dW}{dA_{app}} = P(\vartheta, \varphi) \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$P(\vartheta, \varphi) = \frac{I(\vartheta, \varphi)}{R^2}$$

Radiazione Lambertiana

La radiazione lambertiana ha L costante vs direzione.



L'irradianza (eccitanza) spettrale nel caso lambertiano (il "magico" π):

$$E_\lambda = L_\lambda \int_{2\pi} \cos \vartheta_r d\Omega_t = L_\lambda \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta_r \sin \vartheta_r d\vartheta_r d\varphi_r = \pi L_\lambda$$

$$M_\lambda = \pi L_\lambda$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d(\sin \vartheta) = 2\pi \left. \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right|_0^{\pi/2} = \pi$$

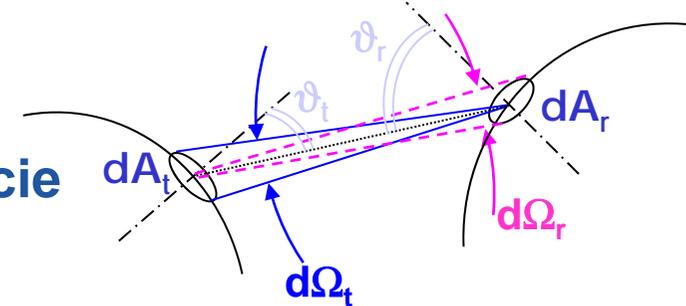
Invarianza radianza con distanza

Corpo irradiante (trasmettitore) e ricevente estesi

$L_r(\vartheta, \varphi)$ è brillantezza incidente su dA_r .

$L_t(\vartheta, \varphi)$ è brillantezza irradiata da dA_t .

- Potenza incidente su dA_r da superficie dA_t (entro angolo $d\Omega_t$)



$$d^2W_i = L_r(\vartheta_r, \varphi_r) dA_r \cos \vartheta_r d\Omega_t$$

- In assenza di perdite nello spazio, d^2W_i è uguale potenza irradiata da dA_t su superficie dA_r (entro angolo $d\Omega_r$)

$$d^2W_i = L_t(\vartheta_t, \varphi_t) dA_t \cos \vartheta_t d\Omega_r$$

$$dA_t \cos \vartheta_t \frac{dA_r \cos \vartheta_r}{R^2} = d\Omega_t dA_r \cos \vartheta_r$$

$$L_t dA_t \cos \vartheta_t d\Omega_r = L_t dA_r \cos \vartheta_r d\Omega_t = L_r dA_r \cos \vartheta_r d\Omega_t \Rightarrow L_t(\vartheta_t, \varphi_t) = L_r(\vartheta_r, \varphi_r)$$

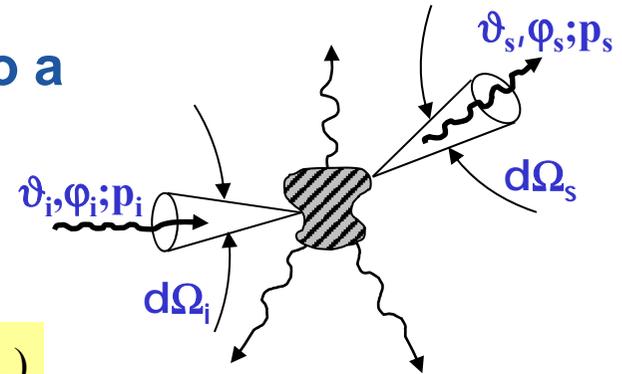
**Radianza è costante in mezzo isotropo senza perdite.
E' proprietà radiazione, non di emettitori / ricevitori**

Parametri interazione superficiale - 1

Incide onda polarizzata p_i da ϑ_i, φ_i e osservo a distanza r radiazione verso ϑ_s, φ_s pol. p_s

Sezione trasversa di diffusione bistatica (radar cross section) [m^2]:

$$\sigma(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s; p_i, p_s) = \sigma_{p_i p_s}(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{s}}) = \frac{4\pi r^2 P_s(\vartheta_s, \varphi_s; p_s)}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i; p_i)}$$



con P_i e P_s densità di potenza incidente e diffusa.

Se W_s potenza diffusa (tutte direzioni), W_a pot. assorbita, $W_e = W_s + W_a$ pot. estinta [Watt] i parametri omnidirezionali:

Sezione trasversa di diffusione [m^2]:

$$\sigma_s(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{W_s}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Sezione trasversa di assorbimento [m^2]:

$$\sigma_a(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{W_a}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Sezione trasversa di estinzione [m^2]:

$$\sigma_e(\vartheta_i, \varphi_i) = \sigma_a + \sigma_s = \frac{W_e}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Assumendo potenze in banda df ($d\lambda$) in genere dipendono da frequenza (lunghezza d'onda)

Parametri interazione superficiale - 2

Albedo diffusione superficiale

[#] quantifica diffusione rispetto a estinzione:

$$w = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} = \frac{\sigma_e - \sigma_a}{\sigma_e} = 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_e}$$

Funzione di fase [#] descrive distribuzione angolare di diffusione superficiale:

$$\Psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) = \frac{\sigma(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s)}{\sigma_s(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Legame tra parametri bidirezionali e omnidirezionali

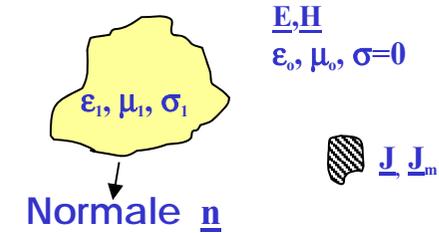
$$\sigma_s(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{W_s}{P_i} = \frac{\int I_s(\vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s}{P_i} = \frac{\int \frac{1}{4\pi} P_i(\vartheta_i, \varphi_i) \sigma(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s}{P_i} = \frac{1}{4\pi} \int \sigma(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s$$

Proprietà normalizzazione funzione di fase (dividendo per σ_s):

$$\int_{4\pi} \Psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s = 4\pi$$

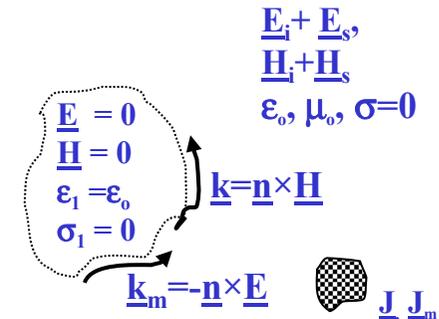
Richiami teorema induzione

- Nello spazio (vuoto) in cui si vuole determinare il campo, sia presente un mezzo con caratteristiche elettriche (ϵ_1, μ_1, s_1) diverse rispetto allo spazio circostante e delle sorgenti $\underline{J}, \underline{J}_m$
- Definendo con campo incidente $\underline{E}_i, \underline{H}_i$ quello in assenza dell'oggetto il campo esterno si scrive:



$$\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_s \quad \underline{H} = \underline{H}_i + \underline{H}_s$$

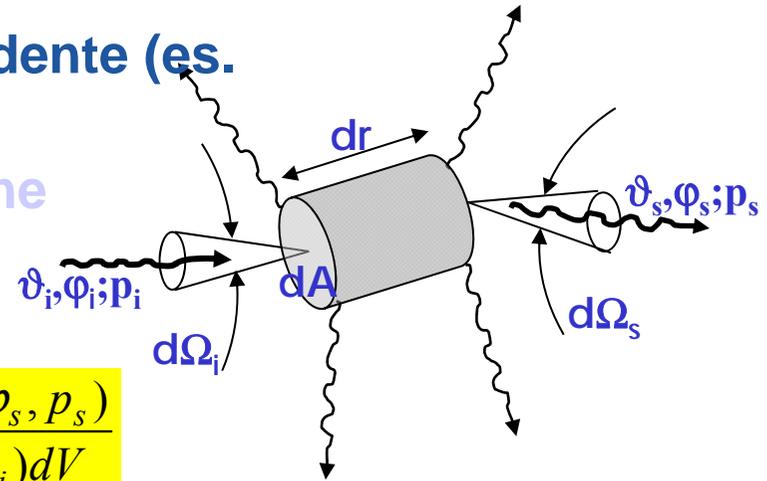
- $\underline{E}_s, \underline{H}_s$ è il campo di scattering ovvero la modifica determinata dall'oggetto
- Si dimostra (teorema di induzione) il problema è equivalente nello spazio esterno a quello in cui l'oggetto è sostituito da correnti equivalenti indotte (sorgenti del campo di scattering) che irradiano nello spazio libero



Parametri interazione volumetrici - 1

Volumetto infinitesimo dissip., diffondente (es. polidispersione aleatoria particelle)

Coefficiente **volumetrico** di diffusione bistatico o differenziale [m^{-1}]:



$$\sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s; p_i, p_s) = k_d(\cdot) = \frac{d\sigma}{dV} = \frac{4\pi dI_s(\vartheta_s, \varphi_s, p_s)}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i, p_i) dV}$$

Se dW_s potenza diffusa (tutte direzioni), dW_a pot. assorbita, $dW_e = dW_s + dW_a$ pot. estinta [Watt] i parametri omnidirezionali:

Coefficiente **volumetrico** diffusione [m^{-1}]:

$$k_s(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_s}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Coefficiente **volumetrico** assorbimento [m^{-1}]:

$$k_a(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_a}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Coefficiente **volumetrico** estinzione [m^{-1}]:

$$k_e(\vartheta_i, \varphi_i) = k_a + k_s$$

Albedo di diffusione volumetrica [#]:

$$w = \frac{dW_s}{dW_e} = \frac{k_s}{k_e}$$

Parametri interazione volumetrici - 2

Albedo singolo scattering [#] quantifica
diffusione rispetto a estinzione:

$$w(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_s}{dW_e} = \frac{k_s}{k_e} = \frac{k_e - k_a}{k_e} = 1 - \frac{k_a}{k_e}$$

Funzione di fase [#] descrive
distribuzione angolare diffusione:

$$\Psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) = \frac{\sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s)}{k_s(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Legami e proprietà normalizzazione analoghi a corpo singolo:

$$k_s(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_s}{dVP_i} = \frac{\int I_s(\vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s}{dVP_i} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s$$

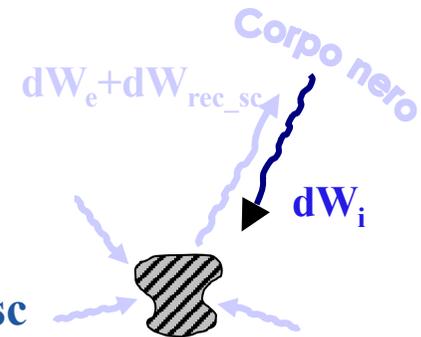
$$\int_{4\pi} \Psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s = 4\pi$$

Legge di Kirchhoff per volume elementare

Il corpo sia immerso in una cavità (corpo nero). Per conservazione energia potenza incidente da una direzione dW_i è in parte assorbita dW_a ed in parte diffusa dW_s in tutte le direzioni:

$$dW_i(\vartheta_i, \varphi_i) = dW_a + dW_s = dW_a + \int I_s(\vartheta_s, \varphi_s) d\Omega_s$$

In equilibrio termodinamico con il CN in ogni direzione (θ, φ) e per ogni frequenza potenza emessa dW_{em_term} e recuperata da tutte le direzioni per diffusione dW_{rec_sc} eguagliano quella incidente.



$$dW_i(\vartheta, \varphi) = dW_{em_term}(\vartheta, \varphi) + dW_{rec_scat}(\vartheta, \varphi) = e_\lambda(\vartheta, \varphi) B_{\lambda CN} d\Omega + I_s(\vartheta, \varphi) d\Omega$$

Dalla def. di σ e incidendo dal CN
circostante $P_i = B_{cn} d\Omega_i$:

$$dW_s = \int I_s(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{dV}{4\pi} B_{\lambda CN} d\Omega_i \int \sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) d\Omega$$

$$dW_{rec_sc}(\vartheta, \varphi) = I_s(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int \sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) B_{\lambda CN} d\Omega_i$$

Risulta $dW_{rec_sc} = dW_s$ in quanto si dimostra la proprietà di reciprocità:

$$\sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi; p_i, p_s) = \sigma_v(\vartheta, \varphi; \vartheta_i, \varphi_i; p_s, p_i)$$

Dalla legge equilibrio term. e conservazione energia

$$dW_{em.term.} = e_\lambda B_{\lambda CN} dA d\Omega = dW_a = k_a dV dP_i = k_a dA dr B_{\lambda CN} d\Omega$$

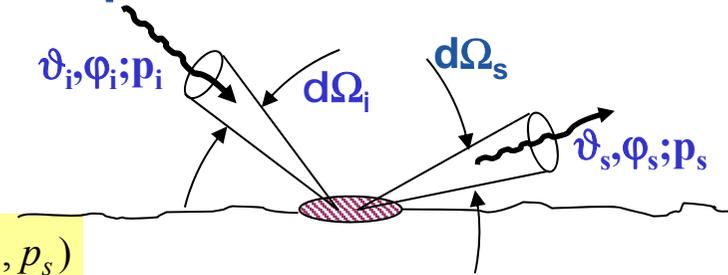
Si deduce legame tra emissività e coefficiente assorbimento del volumetto (legge di Kirchhoff):

$$e_\lambda(\vartheta, \varphi) = k_a(\vartheta, \varphi; \lambda) dr$$

Parametri di interazione superficiale - 1

Superficie rugosa aleatoria di mezzo dissipativo illimitato

Coefficiente **superficiale** di diffusione **bistatico** [numero puro #]:



$$\sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s; p_i, p_s) = \sigma_{p_i p_s}^0(\underline{i}, \underline{s}) = \frac{d\sigma}{dA} = \frac{4\pi r^2 dP_s(\vartheta_s, \varphi_s, p_s)}{P_i(\vartheta_i, \varphi_i, p_i) dA}$$

O anche Coefficiente **superficiale** di riflessione bistatico [#]:

$$\sigma_r(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s; p_i, p_s) = \frac{\pi B_s(\vartheta_s, \varphi_s, p_s)}{E_i(\vartheta_i, \varphi_i, p_i)} = \frac{\pi dI_s / dA \cos \vartheta_s}{P_i \cos \vartheta_i} = \frac{\sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s)}{4 \cdot \cos \vartheta_s \cdot \cos \vartheta_i}$$

Se dW_a è potenza assorbita da dA , **Assorbanza** [#]

$$a(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_a}{dW_i(\vartheta_i, \varphi_i)} = \frac{dW_a}{dA \cdot E(\vartheta_i, \varphi_i)}$$

Se dW_s potenza diffusa (in tutte direzioni) [Watt] **Albedo superficiale** [#]:

$$w(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_s}{dW_s + dW_a} = \frac{dW_s}{dW_i(\vartheta_i, \varphi_i)} = \frac{M}{E(\vartheta_i, \varphi_i)} = \frac{M}{P_i \cos \vartheta_i}$$

Parametri di interazione superficiale - 2

Esplicitiamo il fatto che l'eccitanza diffusa è in genere dovuta ad entrambe le polarizzazioni (superficie che depolarizza), il legame tra albedo (omnidirezionale) e coefficienti diffusione bidirezionale:

$$w(\underline{\mathbf{i}}) = \frac{M}{E(\underline{\mathbf{i}}; p_i)} = \frac{\int [I_s(p_i) + I_s(p_s)] d\Omega_s}{dA P_i(\underline{\mathbf{i}}; p_i) \cos \vartheta_i} = \frac{1}{4\pi \cos \vartheta_i} \int [\sigma_{p_i, p_i}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{s}}) + \sigma_{p_i, p_s}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{s}})] d\Omega_s =$$

Superficie rugosa diffondente lambertiana con albedo indipendente da direzione incidenza:

$$\sigma_r(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s) = \frac{\pi B_s}{E_i} = \underbrace{\sigma_r}_{\text{Indipendente direzione}} = w \Rightarrow \sigma^0 = 4\sigma_r \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s = \underbrace{\sigma_n^0}_{\text{\sigma^0 in direzione normale}} \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s$$

La brillantezza B_s (o radianza) diffusa in funzione dell'irradianza E_i

$$B_s = \frac{\sigma_r E_i}{\pi} = \frac{w E_i}{\pi} = \frac{\sigma_n^0 E_i}{4\pi}$$

Superficie piana con riflessione speculare ($\vartheta_{sp} = \vartheta_i$; $\varphi_{sp} = \pi - \varphi_i$); Γ è coefficiente riflessione Fresnel in campo vs polarizzazioni:

$$\sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s; p_i, p_s) = 4\pi \left| \Gamma_{i,s} \right|^2 \frac{\cos \vartheta_i}{\sin \vartheta_{sp}} \delta(\vartheta_s - \vartheta_{sp}) \delta(\varphi_s - \varphi_{sp})$$

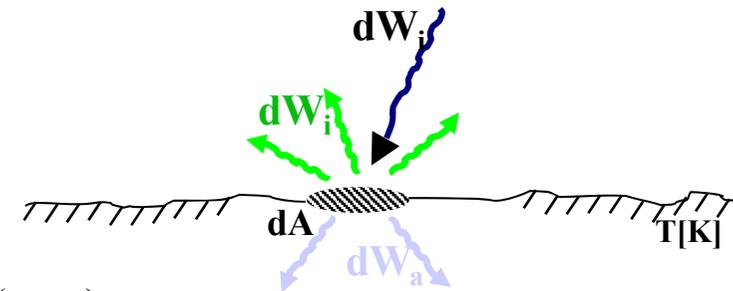
Legame tra assorbanza e albedo

Intensità vettore di Poynting incidente P_i da direzione (θ_o, φ_o) in pol. p_o . La potenza incidente sull'areola dA :

$$dW_i(\vartheta_o, \varphi_o) = dA P_i(\underline{o}; p_o) \cos \vartheta_o$$

Potenza diffusa in tutte le direzioni nel semispazio superiore ed in entrambe le polarizzazioni:

$$dW_s = w(\underline{o}) dW_i = \int_{2\pi} [I_s(\underline{s}; p_o) + I_s(\underline{s}; p_s)] d\Omega_s = \frac{dA P_i(\underline{o}; p_o)}{4\pi} \int_{2\pi} [\sigma_{p_o, p_o}^o(\underline{o}, \underline{s}) + \sigma_{p_o, p_s}^o(\underline{o}, \underline{s})] d\Omega_s$$



La potenza trasmessa dW_t sotto la superficie del mezzo dissipativo sarà anche assorbita dal mezzo e pertanto $dW_t = dW_a$

Per la conservazione dell'energia:

$$dW_i(\vartheta_o, \varphi_o) = dW_t(\vartheta_o, \varphi_o) + dW_s(\vartheta_o, \varphi_o) = dW_a(\vartheta_o, \varphi_o) + dW_s(\vartheta_o, \varphi_o)$$

$$1 = \frac{dW_a(\vartheta_o, \varphi_o)}{dW_i(\vartheta_o, \varphi_o)} + \frac{dW_s(\vartheta_o, \varphi_o)}{dW_i(\vartheta_o, \varphi_o)}$$

Dalla definizione di assorbanza a (dal coeff. assorb.) e albedo superficiale si ricava:

$$a(\vartheta_o, \varphi_o) = k_a(\vartheta_o, \varphi_o) dr = 1 - w(\vartheta_o, \varphi_o) = 1 - \frac{1}{4\pi \cos \vartheta_o} \int_{2\pi} [\sigma_{p_o, p_o}^o(\underline{o}, \underline{s}) + \sigma_{p_o, p_s}^o(\underline{o}, \underline{s})] d\Omega_s$$

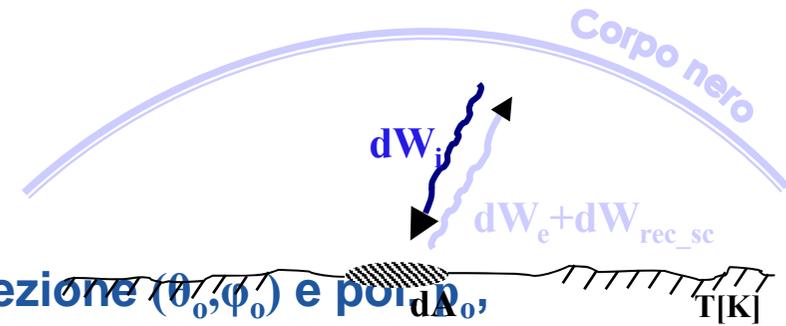
Legge di Kirchhoff e parametri direzionali

Superficie rugosa dissipativa sovrastata da Corpo Nero (lambertiano). La potenza incidente in una banda $d\mathbf{f}$:

$$dW_i(\vartheta_o, \varphi_o) = dAP_i(\underline{\mathbf{o}}; p_o) = dA \cos \vartheta_o B_{CN} d\Omega_o$$

Potenza emessa (per def. Emissività):

$$dW_e(\vartheta_o, \varphi_o) = e(\vartheta_o, \varphi_o) B_{CN} dA \cos \vartheta_o d\Omega_o$$



Potenza recuperata per diffusione in direzione (θ_o, φ_o) e polarizzazione p_o , proveniente da tutte direzioni e polarizzazioni di incidenza :

$$dW_{res_sc} = I_s(\underline{\mathbf{o}}; p_o) d\Omega_o = \int_{2\pi} [I_s(\underline{\mathbf{s}}; p_o) + I_s(\underline{\mathbf{s}}; p_s)] d\Omega_s = \frac{dA}{4\pi} \int_{2\pi} [P_i(\underline{\mathbf{i}}; p_o) \sigma_{p_o p_o}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{o}}) + P_i(\underline{\mathbf{i}}; p_i) \sigma_{p_s p_o}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{o}})] d\Omega_i$$

Considerando che il mezzo sovrastante è un corpo nero e la relazione di reciprocità $\sigma_{pspo}^o(\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{o}}) = \sigma_{pops}^o(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{s}})$:

$$dW_{res_sc} = \frac{dA B_{CN} d\Omega_o}{4\pi} \int_{2\pi} [\sigma_{p_o p_o}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{o}}) + \sigma_{p_i p_o}^o(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{o}})] d\Omega_i = \frac{dA B_{CN} d\Omega_o}{4\pi} \int_{2\pi} [\sigma_{p_o p_o}^o(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{i}}) + \sigma_{p_o p_i}^o(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{i}})] d\Omega_i$$

All'equilibrio termodinamico la potenza incidenza in direzione (θ_o, φ_o) e polarizzazione p_o è equilibrata da quella emergente dalla superficie:

$$dW_i(\vartheta_o, \varphi_o; p_o) = dW_e(\vartheta_o, \varphi_o; p_o) + dW_{rec_sc}(\vartheta_o, \varphi_o; p_o)$$

Si ricava la fondamentale relazione che, si dimostra, vale frequenza per frequenza (parametri spettrali)

$$1 = e(\vartheta_o \varphi_o; p_o) + \frac{1}{4\pi \cos \vartheta_o} \int_{2\pi} [\sigma_{p_o p_o}^o(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{i}}) + \sigma_{p_o p_i}^o(\underline{\mathbf{o}}, \underline{\mathbf{i}})] d\Omega_i = e(\vartheta_o \varphi_o; p_o) + w(\vartheta_o \varphi_o; p_o)$$

da cui: $e(\vartheta_o \varphi_o; p_o) = 1 - w(\vartheta_o \varphi_o; p_o) = a(\vartheta_o \varphi_o; p_o)$

Parametri (omnidirezionali) interazione strato

Se dW_i potenza incidente da tutte direzioni, dW_s pot. diffusa (tutte direzioni), dW_a pot. assorbita [Watt] i parametri omnidirezionali:

Assorbanza [#]

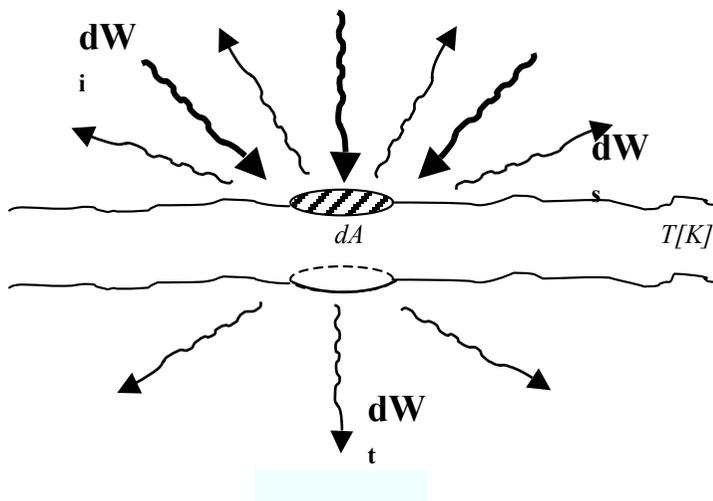
$$a = \frac{dW_a}{dW_i} = \frac{dW_a}{dA \cdot E}$$

Trasmittanza [#]

$$t = \frac{dW_t}{dW_i} = \frac{dW_t}{dA \cdot E}$$

Albedo superficiale [#]

$$w = \frac{dW_s}{dW_i} = \frac{M}{E}$$



Per conservazione energia
 $dW_i = dW_s + dW_a + dW_t$ dunque:

$$a = 1 - w - t$$

Per strato illimitato (superficie)
 $W_t = 0$ dunque:

$$a = 1 - w$$

Un corpo buon assorbitore trasmette e riflette poco

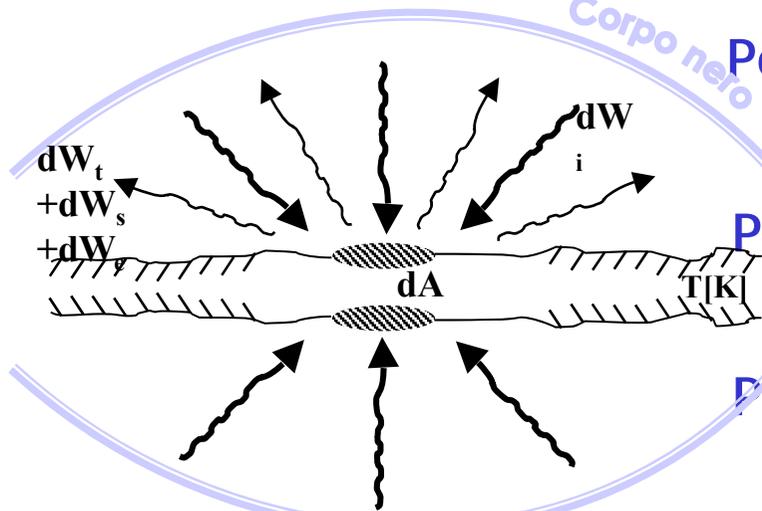
Una corpo buon trasmettitore assorbe poco

Legge di Kirchhoff e parametri omnidirezionali

Legge emissività e strato dissipativo alla assorbanza a (in equilibrio termodinamico)

Strato racchiuso da corpo nero. Potenza incidente DOWN su dA nella banda df (Lambertiana):

$$dW_i = M_{fCN} df dA = \pi L_{fCN} df dA$$



Potenza emessa UP da dA (Lamb.):

$$dW_e = e \cdot M_{fCN} df dA = e \cdot \pi L_{fCN} df dA$$

Potenza diffusa UP da dA (Lamb.):

$$dW_s = w \cdot dW_i = w \cdot \pi L_{fCN} df dA$$

Potenza trasmessa UP da dA (Lamb.):

$$dW_t = t \cdot dW_i = t \cdot \pi L_{fCN} df dA$$

All'equilibrio tra i corpi

$$dW_i = dW_s + dW_e + dW_t$$

$$e = a = 1 - w - t$$

Un corpo buon emettitore è anche buon assorbitore

Una corpo molto riflettente necessariamente è cattivo emettitore / assorbitore

Equazione del trasferimento radiativo - 1

Mezzo naturale dissipativo e disomogeneo e con caratteristiche aleatorie (es. polidispersione di particelle disposte aleatoriamente). Considerato un volumetto elementare dV (ma sufficiente per calcolare parametri medi) e direzione \underline{r} propagazione radianza.

Radianza (brillanza) persa per assorbimento

$$k_a(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_a}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i)} = \frac{dB_a dAd\Omega_i}{dAdrB(\vartheta_i, \varphi_i)d\Omega_i} \quad dB_a = -k_a Bdr$$

Radianza (brillanza) persa per diffusione

$$k_s(\vartheta_i, \varphi_i) = \frac{dW_s}{dVP_i(\vartheta_i, \varphi_i)} = \frac{dB_s dAd\Omega_i}{dAdrB(\vartheta_i, \varphi_i)d\Omega_i} \quad dB_s = -k_s Bdr$$

Per la linearità radianza (brillanza) complessivamente persa (estinta)

$$dB_e = dB_a + dB_{sc} = -(k_a Bdr + k_s Bdr) = -k_e Bdr$$

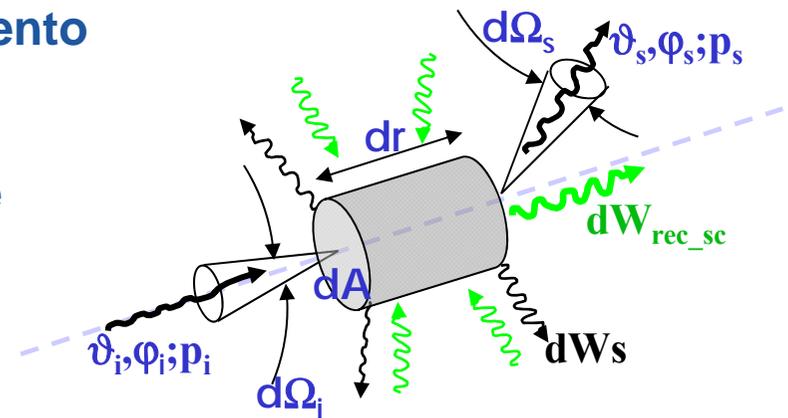
Incremento radianza emessa verso \underline{r} , introducendo funzione sorgente emissione $\mathbf{J}_a = \mathbf{B}_{CN}$

$$dB_{em_term} = eB_{CN} = k_a B_{CN} dr = k_a J_a dr$$

Incremento radianza per recupero di diffusione introducendo funzione sorgente diffusione \mathbf{J}_s

$$dW_{rec_sc}(\vartheta, \varphi) = dB_{rec_sc} dAd\Omega = I_s(\vartheta, \varphi) d\Omega = \frac{dV d\Omega}{4\pi} \int \sigma_v(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) B(\vartheta_i, \varphi_i) d\Omega_i$$

$$dB_{rec_sc} = \frac{dr}{4\pi} \int k_s \psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) B(\vartheta_i, \varphi_i) d\Omega_i = k_s J_s dr$$



Equazione del trasferimento radiativo - 2

Funzione sorgente di emissione:

$$J_a(r) = B_{fCN} = \frac{2hf^3}{e^2(e^{hf/kT} - 1)}$$

Funzione sorgente di diffusione:

$$J_s = \frac{1}{4\pi} \int k_s \psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) B(\vartheta_i, \varphi_i) d\Omega_i$$

L'incremento di brillantezza si può scrivere, introducendo funzione sorgente totale $J=(1-w)J_a+wJ_s$:

$$dB_{(emiss.+rec.scatt.)} = k_e \left(\frac{k_a}{k_e} J_a + \frac{k_s}{k_e} J_s \right) dr = k_e [(1-w)J_a + wJ_s] dr = k_e J dr$$

La variazione totale di brillantezza attraverso il volumetto dV :

$$dB = -dB_{est} + dB_{(em+rec_sc)} = k_e (J - B) dr$$

Introducendo l'incremento di spessore ottico $d\tau=k_e dr$, l'equazione del trasferimento radiativo in forma differenziale descrive la variazione di $B(r)$ lungo il percorso r :

$$\frac{dB(r)}{d\tau} + B(r) = J(r)$$

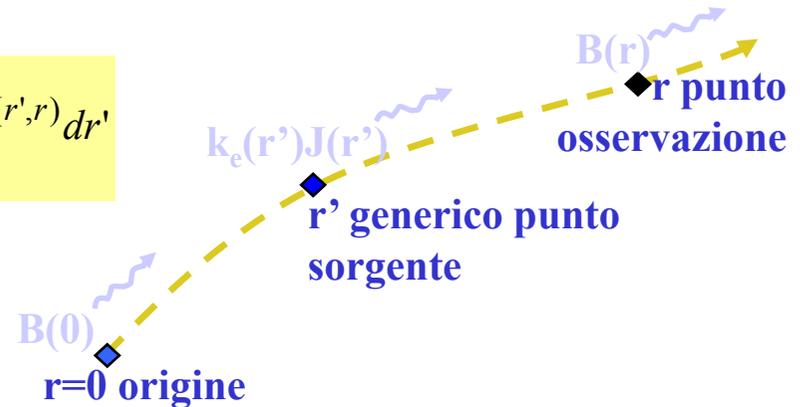
Forma integrale di ETR (o RTE)

Definito lo spessore ottico dal punto di coordinata curvilinea r_1 al punto r_2 :

$$\tau(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} k_e dr$$

Si ricava la Radiative Transfer Equation (RTE) in forma integrale (si noti presenza incognita B nella funzione di sorgente nell'integrale) :

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',r)} dr'$$



Dimostrazione:

$$\frac{dB(r')}{d\tau} e^{\tau(0,r')} + B(r')e^{\tau(0,r')} = J(r')e^{\tau(0,r')}$$

$$\frac{d}{d\tau} [B(r')e^{\tau(0,r')}] = J(r')e^{\tau(0,r')}$$

$$d[B(r')e^{\tau(0,r')}] = k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr$$

$$B(r')e^{\tau(0,r')} \Big|_0^r = \int_0^r k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr$$

$$B(r)e^{\tau(0,r)} - B(0)e^{\tau(0,0)} = \int_0^r k_e(r')J(r')e^{\tau(0,r')} dr$$

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',0)}e^{-\tau(0,r)} dr$$

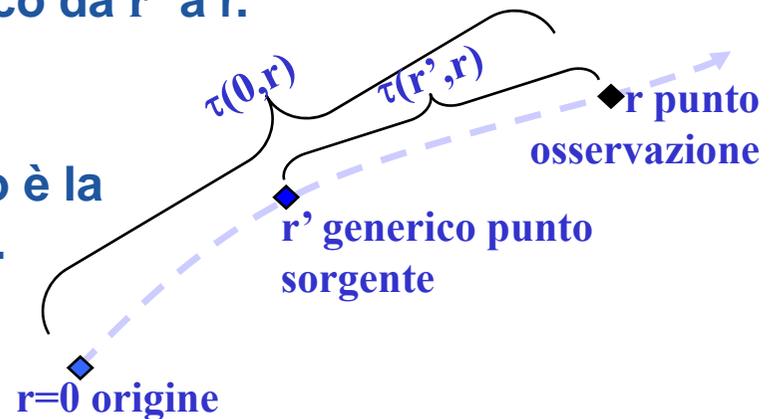
Interpretazione e casi particolari

Interpretazione intuitiva: la brillantezza nell'origine $r=0$ del percorso si attenua del fattore legato allo spessore ottico dall'origine al punto r . Ogni generico punto r' è sede di una sorgente che viene attenuata secondo lo spessore ottico da r' a r .

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r')J(r')e^{-\tau(r',r)} dr'$$

L'esponenziale dello spessore ottico è la **trasmissione** del percorso da r' a r .

$$t(r',r) = e^{-\tau(r',r)} = e^{-\int_{r'}^r k_e(r'') dr''}$$



Caso assenza di scattering $k_s=0$. L'equazione è risolvibile.

$$B(r) = B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_a(r')J_a(r')e^{-\int_{r'}^r k_a(r'') dr''} dr'$$

Caso di piccolo albedo $w \ll 1$ per cui si trascura il recupero di diffusione (ma non l'estinzione da diffusione):

$$B(r) \cong B(0)e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r [1-w(r')]k_e(r')J(r')e^{-\int_{r'}^r k_e(r'') dr''} dr'$$

Trasferimento radiativo a microonde

Ricordando l'approssimazione di Rayleigh-Jeans la brillantezza è legata alla temperatura di brillantezza dalla:

$$B(r) = \frac{2k}{\lambda^2} T_B(r) \Delta f$$

Funzione di sorgente di emissione
($T(r)$ temperatura fisica)

$$J_a(r) = \frac{2k}{\lambda^2} T(r) \Delta f$$

Funzione di sorgente di scattering $J_s = \frac{1}{4\pi} \int k_s \psi(\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta, \varphi) \frac{2k}{\lambda^2} T_B(\vartheta_i, \varphi_i) d\Omega_i = \frac{2k}{\lambda^2} T_{sc}(r) \Delta f$

Avendo per analogia introdotto la temperatura di scattering

$$T_{sc}(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} \Psi(r, \underline{r}_i) T_B(r_i) d\Omega_i$$

Equazione del trasferimento radiativo a microonde in forma integrale

$$T_B(r) = T_B(0) e^{-\tau(0,r)} + \int_0^r k_e(r') [(1-w)T(r') + wT_{sc}(r')] e^{-\tau(r',r)} dr'$$

Strato assorbente omogeneo isoterma

Consideriamo strato omogeneo e isoterma (parametri interazione e temperatura costanti) non diffondente di spessore H . La brillantezza generata dallo strato ($B(0)=0$)

$$B(r) = \int_0^H k_a(r') J_a(r') e^{-\int_{r'}^H k_a(r'') dr''} dr' = \int_0^H k_a J_a e^{k_a(r'-H)} dr' = J_a e^{-k_a H} \int_0^H e^{k_a r'} d(k_a r') =$$

$$B(r) = J_a e^{-k_a H} \left[e^{k_a r'} \right]_{r'=0}^{r'=H} = J_a e^{-k_a H} \left[e^{k_a H} - 1 \right] = J_a \left[1 - e^{-k_a H} \right] \quad B(r) = J_a [1 - t]$$

La radianza prodotta dallo strato è pari a quella di un corpo nero alla stessa temperatura per 1 meno trasmittanza dello strato

Alle microonde la T_B dello strato a temperatura T :

$$T_B(r) = T \left[1 - e^{-k_a H} \right] = T [1 - t]$$

Strato trasparente $t=1$, $T_B=0$. Strato con elevato spessore ottico τ , infinitamente spesso ($H \rightarrow \infty$) o molto assorbente ($k_a \rightarrow \infty$) risulta $t \rightarrow 0$ e quindi $T_B=T$, temperatura fisica

Temperatura media radiativa di uno strato qualsiasi: temperatura dello strato omogeneo isoterma equivalente

$$T_B(r) = \frac{\int_0^H k_a(r') T(r') e^{-\tau(r',H)} dr'}{\int_0^H k_a(r') e^{-\tau(r',H)} dr'} = \frac{\int_0^H k_a(r') e^{\tau(H,r')} dr'}{\int_0^H k_a(r') e^{\tau(H,r')} dr'} = T_m \int_0^H e^{\tau(H,r')} d\tau = T_m \left[e^{\tau(H,r')} \right]_{\tau(H,0)}^{\tau(H,H)} = T_m \left[1 - e^{-\tau(0,H)} \right]$$

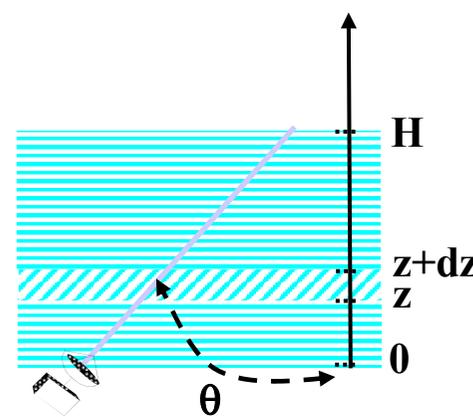
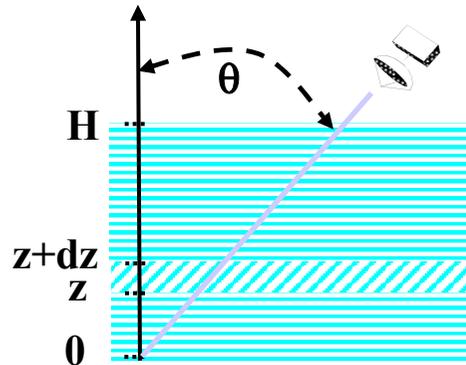
Brillanza di strato non diffondente piano-parallelo

Strato (atmosferico) piano-parallelo ovvero parametri di interazione dipendono solo dalla quota z : $k_a(\underline{r})=k_a(z)$, $k_e(\underline{r})=k_e(z)$, $w(\underline{r})=w(z)$.
 Strato non diffondente ($w=0$) di spessore H . Percorso obliquo inclinato θ rispetto verticale lungo r

$$r' = \frac{z'}{\cos \vartheta} = z' \sec \vartheta \quad dr' = dz' \sec \vartheta$$

$$r = H \sec \theta$$

$$\tau(z', H) = \int_{z'}^H k_e(z) dz$$



Temperatura di brillanza verso l'alto (**UP**) per emissione/
 assorbimento strato osservato in direzione θ alla quota H

$$B(r) = B_{UP}(\vartheta; H) = \int_0^r k_a(r') J_a(r') e^{-\tau(r', r)} dr'$$

$$B_{UP}(\vartheta; H) = \sec \vartheta \int_0^H k_a(z') J_a(z') e^{-\tau(z', H) \sec \vartheta} dz'$$

Temperatura di brillanza verso il
 basso (**DOWN**) strato osservato
 in direzione θ alla quota 0

$$B_{DN}(\vartheta) = \sec \vartheta \int_0^H k_a(z') J_a(z') e^{-\tau(0, z') \sec \vartheta} dz'$$

Brillanza di atmosfera+superficie

Strato (atmosfera) piano-parallelo sopra la superficie terrestre ($z=0$) che in direzione θ irradia radianza $B(\theta;0)$. La brillanza osservata in direzione θ alla quota H :

$$B(\vartheta; H) = B(\vartheta;0)e^{-\tau(0,H)\sec\vartheta} + B_{UP}(\vartheta; H)$$

Trasmittanza atmosferica
(direzione obliqua):

$$t(\vartheta, H) = e^{-\tau(0,H)\sec\vartheta}$$

Fattore perdita atmosferica
(direzione obliqua):

$$L_a(\vartheta, H) = 1/t(\vartheta, H) = e^{\tau(0,H)\sec\vartheta}$$

In dB:

$$L_a(dB) = 10 \log L_a = 4.34 \cdot \tau(0, H) \sec \vartheta$$

$B(\theta;0)$ ha contributo emesso e contributo diffuso (recupero scattering)

$$B(\vartheta, \varphi; H; p) = \frac{1}{L_a(\vartheta, H)} [B_e(\vartheta, \varphi; p) + B_{rec_sc}(\vartheta, \varphi; p)] + B_{UP}(\vartheta; H)$$

$$B_e(\vartheta, \varphi; p) = e(\vartheta, \varphi; p) B_{CN}(T)$$

$$B_{rec_sc}(\vartheta, \varphi; p) = \frac{1}{4\pi \cos \vartheta} \int_{2\pi} B_i(\vartheta_i, \varphi_i) [\sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i, \vartheta, \varphi; p_i, p) + \sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i, \vartheta_\lambda, \varphi_\lambda; p, p)] d\Omega_i$$

Brillanza incidente su superficie dovuta ad atmosfera B_{DN} più contributo extraterrestre (Sole e/o galattica e/o background cosmico):

$$B_i(\vartheta_i, \varphi_i) = B_{DN}(\vartheta_i, \varphi_i) + B_{EX} e^{-\tau(0,\infty)\sec\vartheta}$$

TB atmosfera + superficie a microonde

T_B osservata a quota H :

$$T_B(\vartheta, \varphi, H; p) = \frac{1}{L_a(\vartheta, H)} [T_{Be}(\vartheta, \varphi, p) + T_{sc}(\vartheta, \varphi, p)] + T_{UP}(\vartheta, H)$$

T_B atmosfera verso l'alto:

$$T_{UP}(\vartheta, H) = \sec \vartheta \int_0^H k_a(z') T(z') e^{-\tau(z', H) \sec \vartheta} dz'$$

T_B diffusa da terreno a quota $z=0$:

$$T_{sc}(\vartheta, \varphi, p) = \frac{1}{4\pi \cos \vartheta} \int_{2\pi} T_{Bi}(\vartheta_i, \varphi_i) [\sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i, \vartheta, \varphi, p; p) + \sigma^0(\vartheta_i, \varphi_i, \vartheta_\lambda, \varphi_\lambda; p, p)] d\Omega_i$$

T_B incidente su terreno:

$$T_{Bi}(\vartheta_i, \varphi_i) = T_{DN}(\vartheta_i, \varphi_i) + T_{EX} e^{-\tau(0, \infty) \sec \vartheta}$$

T_B atmosfera verso l'alto (incidente su terreno):

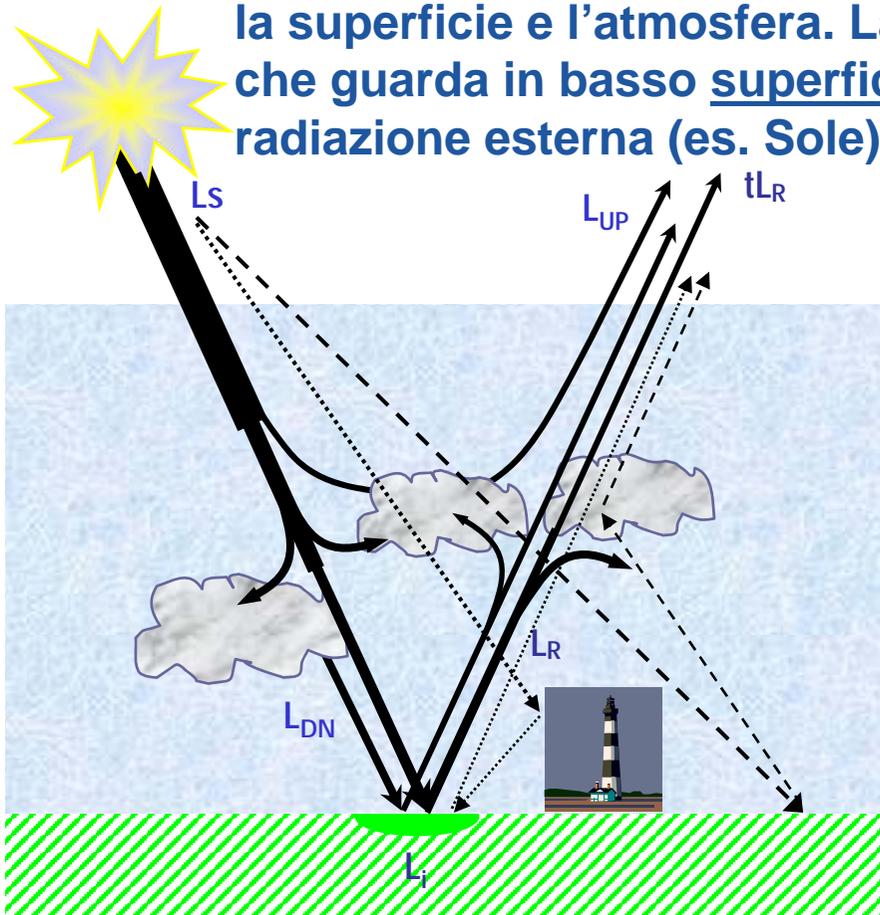
$$T_{DN}(\vartheta) = \sec \vartheta \int_0^\infty k_a(z') T(z') e^{-\tau(0, z') \sec \vartheta} dz'$$

T_B emessa da superficie di temperatura T_s

$$T_{Be}(\vartheta, \varphi, p) = e(\vartheta, \varphi, p) T_s$$

Radiazione da sorgente esterna (sole/TX)

La radiazione osservata è frutto di una serie di interazioni con la superficie e l'atmosfera. La radianza misurata da sensore che guarda in basso superficie lambertiana e sorgente radiazione esterna (es. Sole):



$$L_{tot} = t(wE_i / \pi) + L_{UP}$$

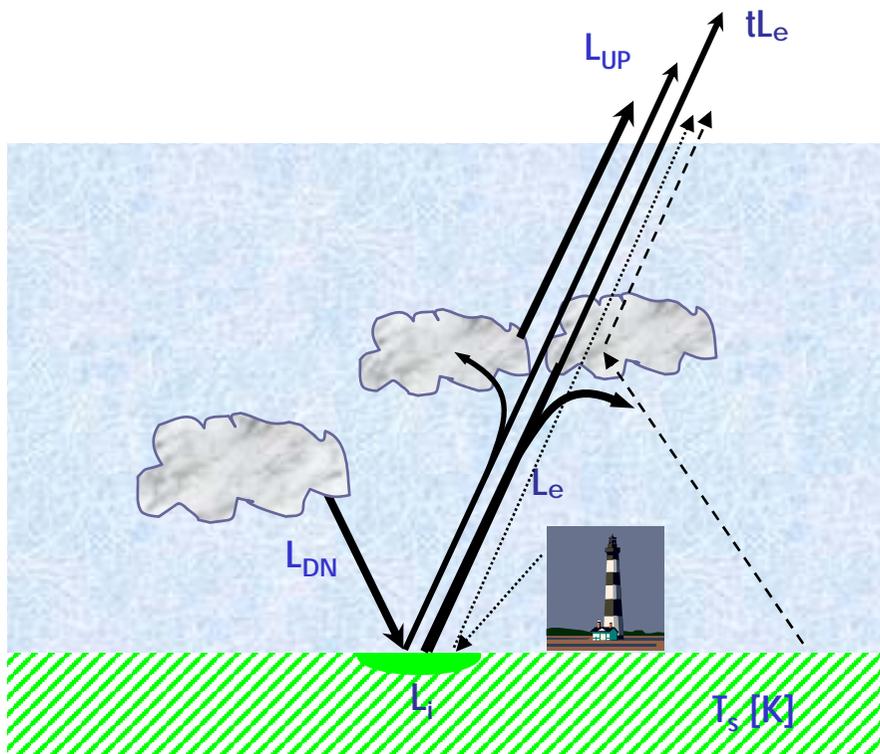
$$E_i = tL_s \cos\vartheta \Delta\Omega + E_{DN}$$

- L_s : radianza sorgente (es. Sole)
- E_{DN} : irradianza atmosfera down (skylight)
- L_{DN} : radianza atmosfera down (skylight)
- L_{UP} : radianza atmosfera up (haze)
- E_i : irradianza incidente su superficie
- ϑ : angolo incidenza radiazione Sole
- $\Delta\Omega$: angolo solido Sole
- t : % " trasmittanza atmosfera
- w : % " albedo superficie

Haze (scattering atmosferico) diminuisce contrasto immagine
Altri percorsi (tratto e punto) determinano effetti adiacenza tra pixel

Radiazione da emissione di natura termica

La radiazione osservata è frutto di emissione ed una serie di interazioni con la superficie e l'atmosfera. La radianza misurata da sensore che guarda in basso una superficie lambertiana:



$$L_{tot} = t[eL_{CN}(T_s) + wE_i / \pi] + L_{UP}$$

$$E_i = E_{DN} = \int L_{DN} \cos \vartheta d\Omega$$

- L_{DN} : Radianza atmosfera down
- L_{UP} : “ atmosfera up
- L_e : “ emessa da superficie
- E_{DN} : irradianza atmosfera down
- e : “ emissività superficie
- t : “ trasmittanza atmosfera
- w : “ albedo superficie
- T_s : Temperatura superficie

Radiazione L_{DN} e L_{UP} dovuta a emissione e diffusione atmosferica
Altri percorsi (tratto e punto) determinano effetti adiacenza tra pixel